Teil 4 mit Hilfsmitteln
Lineare Algebra: Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

1. Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 4 \mid 0)$, $B(0 \mid 0 \mid 2)$ und $C(4 \mid 0 \mid 0)$ sowie $S(6 \mid 6 \mid 8)$.

1.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Ergänzen Sie das Dreieck ABC durch einen Punkt D zu einer Raute.

1.2 Berechnen Sie die Innenwinkel der Raute ABCD.
Zeigen Sie, dass die Raute in der Ebene $E\colon x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.
(Teilergebnis: $D(4 \mid 4 \mid -2)$)

1.3 Zeichnen Sie die Pyramide ABCDS in ein Koordinatensystem.
Die Punkte B, D und S legen eine Ebene F fest.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.
Zeigen Sie, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide ABCDS ist.

Teil 4 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1.1 Um zu zeigen, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, bestimmen Sie die Längen der Dreiecksseiten. Berechnen Sie dazu die Längen der entsprechenden Verbindungsvektoren. Die Koordinaten des Punktes D erhalten Sie mit Hilfe einer Vektorkette.

1.2 Die Innenwinkel der Raute erhalten Sie mit Hilfe der Formel für Winkel zwischen Vektoren: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Beachten Sie, dass die Raute symmetrisch ist und die Winkelsumme 360° beträgt.
Um zu zeigen, dass die Raute in der Ebene E liegt, setzen Sie die Koordinaten von A, B, C und D in die Koordinatengleichung von E ein (Punktprobe).

1.3 Verwenden Sie für die Parametergleichung der Ebene F, in der die Punkte B, D und S liegen, beispielsweise den Stützpunkt B und die Spannvektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BS}$. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von F erhalten Sie mit Hilfe des Vektorprodukts (siehe Seite 72) der Spannvektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{BS}$. Eine Koordinatengleichung von F erhalten Sie mit Hilfe der Punkt-Normalenform: $\left(\vec{x} - \vec{b}\right) \cdot \vec{n} = 0$.
Um zu zeigen, dass F Symmetrieebene der Pyramide ABCDS ist, weisen Sie nach, dass die Ebene F senkrecht auf der Ebene E steht. Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren der Ebenen E und F.

Teil 4 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

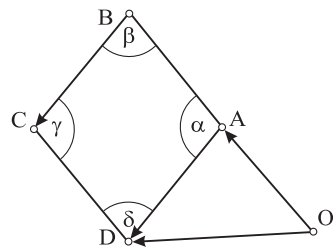
1.1 Um zu zeigen, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, bestimmt man die Längen der Dreiecksseiten. Hierzu berechnet man die Längen der entsprechenden Verbindungsvektoren:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\cdot\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+(-4)^2+0^2} = \sqrt{32} = 4\cdot\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{20} = 2\cdot\sqrt{5}$$

Wegen $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.



Die Koordinaten des Punktes D erhält man mit Hilfe einer Vektorkette:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow D(4 \mid 4 \mid -2)$$

1.2 Die Innenwinkel der Raute ABCD erhält man mit Hilfe der Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren. Es gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|0\cdot 4+4\cdot 0+(-2)\cdot(-2)|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{20}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \beta \approx 78{,}5^\circ$$

Aufgrund der Symmetrie der Raute gilt: $\delta = \beta \approx 78{,}5^\circ$ und $\alpha = \gamma$.

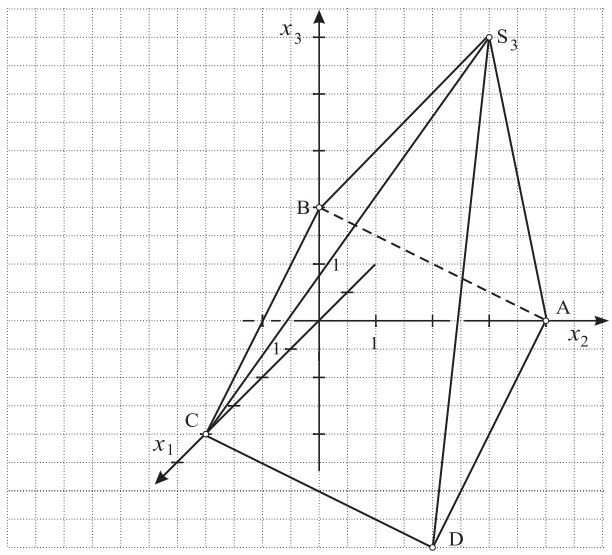
Die Winkelsumme der Raute beträgt $360°$, also gilt:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\cdot\alpha+2\cdot\beta=360° \;\Rightarrow\; 2\cdot\alpha+2\cdot 78{,}5°=360° \;\Rightarrow\; \alpha=\gamma\approx 101{,}5°$$

Die Innenwinkel der Raute betragen somit etwa $78{,}5°$ und $101{,}5°$.

Um zu zeigen, dass die Raute in der Ebene E: $x_1+x_2+2x_3=4$ liegt, setzt man die Koordinaten von A, B, C und D in die Koordinatengleichung von E ein (Punktprobe):
Setzt man $A(0\mid 4\mid 0)$ in E ein, ergibt sich: $0+4+2\cdot 0=4 \Leftrightarrow 4=4 \Rightarrow A\in E$
Setzt man $B(0\mid 0\mid 2)$ in E ein, ergibt sich: $0+0+2\cdot 2=4 \Leftrightarrow 4=4 \Rightarrow B\in E$
Setzt man $C(4\mid 0\mid 0)$ in E ein, ergibt sich: $4+0+2\cdot 0=4 \Leftrightarrow 4=4 \Rightarrow C\in E$
Setzt man $D(4\mid 4\mid -2)$ in E ein, ergibt sich: $4+4+2\cdot(-2)=4 \Leftrightarrow 4=4 \Rightarrow D\in E$
Somit liegt die Raute in der Ebene E.

1.3 Zum Zeichnen der Pyramide ABCDS verwendet man die gegebenen Punkte:



Die Ebene F, in der die Punkte $B(0\mid 0\mid 2)$, $D(4\mid 4\mid -2)$ und $S(6\mid 6\mid 8)$ liegen, hat beispielsweise den Stützpunkt B und die Spannvektoren $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$.

Damit hat F die Parametergleichung:

$$F:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}$$

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von F erhält man mit Hilfe des Vektorprodukts (siehe Seite 72)

der Spannvektoren $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -48 \\ 0 \end{pmatrix} = 48 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Koordinatengleichung von F erhält man mit Hilfe der Punkt-Normalenform:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}\colon \left(\vec{x} - \vec{b}\right) \cdot \vec{n} = 0 \\
&\mathrm{F}\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&\mathrm{F}\colon (x_1 - 0) \cdot 1 + (x_2 - 0) \cdot (-1) + (x_3 - 2) \cdot 0 = 0 \\
&\mathrm{F}\colon x_1 - 0 - x_2 + 0 + 0 = 0 \\
&\mathrm{F}\colon x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}$$

Die Ebene F hat die Koordinatengleichung $\mathrm{F}\colon x_1 - x_2 = 0$.

Um zu zeigen, dass F Symmetrieebene der Pyramide ABCDS ist, kann man folgende Überlegung anstellen:

- Die Ebene F enthält die Punkte B, D und die Spitze S.
- Die Diagonale BD der Raute ist eine Symmetrieachse der Grundfläche der Pyramide.
- Die Grundfläche der Pyramide liegt in der Ebene E.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass die Ebene F senkrecht auf der Ebene E steht. Dies geschieht mit Hilfe des Skalarprodukts der beiden Normalenvektoren der Ebenen E und F:

$$\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren Null ergibt, sind die Normalenvektoren und damit die Ebenen E und F orthogonal zueinander.
Somit ist F Symmetrieebene der Pyramide ABCDS.