

# Straße

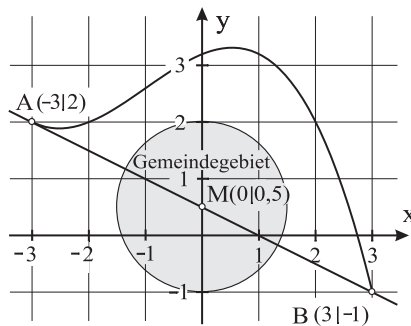


## Aufgabe A 2.1

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt AB einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1,5 km. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A und B und wird beschrieben durch die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2$$

1 LE entspricht 1 km.



- Berechnen Sie die Koordinaten des nördlichsten Punktes der Umgehungsstraße.  
Bestimmen Sie rechnerisch die Entfernung dieses Punktes vom Ortsmittelpunkt M.  
Die Umgehungsstraße beschreibt eine Linkskurve und eine Rechtskurve.  
Bestimmen Sie den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.  
Zeigen Sie, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet.
- Zur Bewertung von Grundstücken wird die Fläche zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße vermessen.  
Berechnen Sie, wie viel Prozent dieser Fläche außerhalb des Gemeindegebiets liegen.
- Im Punkt P(1,5 | 3) befindet sich eine Windkraftanlage.  
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße.  
Zeigen Sie, dass der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt B(2 | 2) genau in Fahrtrichtung vor sich sieht.  
Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Umgehungsstraße, in welchem ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB fährt.

### Aufgabe A 2.2

Für jedes  $a > 0$  ist eine Funktion  $f_a$  gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a; x \in \mathbb{R}.$$

$f_a$  hat das Schaubild  $K_a$  und die Periode  $p_a$ .

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunkts  $H_a$  von  $K_a$  für  $0 \leq x < p_a$ .  
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte liegen.
- b) Geben Sie in Abhängigkeit von  $a$  die Koordinaten des Wendepunkts  $W_a$  von  $K_a$  an, der den kleinsten positiven  $x$ -Wert hat.

# Straße

## Aufgabe A 2.1

- a) Die Koordinaten des nördlichsten Punktes der Umgehungsstraße erhalten Sie, indem Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von  $f$  den Hochpunkt des Graphen von  $f$  bestimmen. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung  $f'(x) = 0$  mithilfe der  $abc$ -Formel nach  $x$  auf. Setzen Sie die erhaltenen  $x$ -Werte in  $f''(x)$  ein; falls das Ergebnis kleiner als Null ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. Den zugehörigen  $y$ -Wert erhalten Sie, indem Sie den  $x$ -Wert in  $f(x)$  einsetzen. Die Entfernung  $d$  von H zu M erhalten Sie mithilfe der Formel für den Abstand zweier Punkte:  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ . Bestimmen Sie die Wendestelle mithilfe der 2. und 3. Ableitung von  $f(x)$ . Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung  $f''(x) = 0$  nach  $x$  auf. Den zugehörigen  $y$ -Wert erhalten Sie, indem Sie den berechneten  $x$ -Wert in  $f(x)$  einsetzen. Berechnen Sie mithilfe von  $f'(x)$  die Steigung  $m_A$  der Kurve im Punkt A sowie die Steigung  $m_{AB}$  der Geraden durch die Punkte A und B mithilfe der Formel  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Falls  $m_A = m_{AB}$  mündet die Umgehungsstraße ohne Knick in die Ortsdurchfahrt ein.
- b) Die Gleichung der Geraden  $g$  durch A und B erhalten Sie mithilfe der Punkt-Steigungsform (PSF)  $y = m \cdot (x - x_Q) + y_Q$ . Setzen Sie die Koordinaten von A (oder B) und  $m_{AB}$  in die PSF ein. Den Flächeninhalt  $A_1$  der Fläche zwischen dem Schaubild von  $f(x)$  und der Geraden AB erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Beachten Sie, dass das Schaubild von  $f(x)$  oberhalb der Geraden  $g$  verläuft. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die Teilfläche des Gemeindegebiets erhalten Sie, indem Sie den Flächeninhalt  $A_2$  eines Halbkreises bestimmen. Berechnen Sie die Differenz von  $A_1$  und  $A_2$  und teilen Sie diese durch  $A_1$ , um den gesuchten Anteil zu erhalten.
- c) Um zu zeigen, dass der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt B genau in Fahrtrichtung vor sich sieht, stellen Sie die Gleichung der Tangente  $t$  im Punkt B auf. Die Steigung  $m_t$  in B erhalten Sie, indem Sie den  $x$ -Wert von B in  $f'(x)$  einsetzen. Anschließend setzen Sie  $m_t$  und die Koordinaten von B in die Tangentengleichung  $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$  ein. Prüfen Sie, ob der Punkt  $P(1,5 \mid 3)$  auf der Tangente liegt, indem Sie seine Koordinaten in die Tangentengleichung einsetzen. Bei einer wahren Aussage liegt P auf  $t$ . Lösen Sie die Gleichung  $f'(x) = m_{AB}$  mithilfe der  $abc$ -Formel nach  $x$  auf. Überlegen Sie, welche Lösung in Frage kommt. Berechnen Sie den zugehörigen  $y$ -Wert.

## Aufgabe A 2.2

- a) Die Koordinaten des Hochpunkts  $H_a$  von  $K_a$  erhalten Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von  $f_a$ ; verwenden Sie die Kettenregel. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung  $f_a'(x) = 0$  nach  $x$  auf. Setzen Sie die erhaltenen  $x$ -Werte in  $f_a''(x)$  ein; ist das Ergebnis kleiner als Null, handelt es sich um einen Hochpunkt. Den zugehörigen  $y$ -Wert erhalten Sie, indem Sie den errechneten  $x$ -Wert in  $f_a(x)$  einsetzen.

Um eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte liegen, zu ermitteln, lösen Sie den  $x$ -Wert von  $H_a$  nach  $a$  auf und setzen das erhaltene Ergebnis in den  $y$ -Wert von  $H_a$  ein.

- b) Den Wendepunkt  $W_a$  von  $K_a$ , der den kleinsten positiven  $x$ -Wert hat, erhalten Sie mithilfe der 2. und 3. Ableitung von  $f_a$ , die Sie mithilfe der Kettenregel bestimmen. Lösen Sie als notwendige Bedingung  $f_a''(x) = 0$  nach  $x$  auf. Setzen Sie den erhaltenen  $x$ -Wert in  $f_a'''(x)$  ein; ist das Ergebnis ungleich als Null, handelt es sich um einen Wendepunkt. Den zugehörigen  $y$ -Wert erhalten Sie, indem Sie den errechneten  $x$ -Wert in  $f_a(x)$  einsetzen.

# Straße

## Aufgabe A 2.1

Es ist  $f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2$ .

- a) Die Koordinaten des nördlichsten Punktes der Umgehungsstraße erhält man, indem man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von  $f$  den Hochpunkt des Graphen von  $f$  bestimmt:

$$f'(x) = -0,3x^2 - 0,6x + 0,4$$

$$f''(x) = -0,6x - 0,6$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung  $f'(x) = 0$  nach  $x$  auf:

$$-0,3x^2 - 0,6x + 0,4 = 0$$

mithilfe der *abc*-Formel erhält man die Lösungen  $x_1 \approx 0,53$  und  $x_2 \approx -2,53$ .

Setzt man  $x_1 \approx 0,53$  und  $x_2 \approx -2,53$  in  $f''(x)$  ein, ergibt sich:

$$f''(0,53) = -0,6 \cdot 0,53 - 0,6 \approx -0,92 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$f''(-2,53) = -0,6 \cdot (-2,53) - 0,6 \approx 0,92 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

Den zum Hochpunkt zugehörigen  $y$ -Wert erhält man, indem man  $x_1 \approx 0,53$  in  $f(x)$  einsetzt:

$$y = f(0,53) = -0,1 \cdot 0,53^3 - 0,3 \cdot 0,53^2 + 0,4 \cdot 0,53 + 3,2 \approx 3,31$$

Somit hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße die Koordinaten  $H(0,53 \mid 3,31)$ .

Die Entfernung  $d$  von  $H(0,53 \mid 3,31)$  zu  $M(0 \mid 0,5)$  erhält man mithilfe der Formel

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  für den Abstand zweier Punkte:

$$d = \sqrt{(0 - 0,53)^2 + (0,5 - 3,31)^2} \approx 2,86$$

Der nördlichste Punkt  $H$  ist also etwa 2,86 km vom Ortsmittelpunkt  $M$  entfernt.

Der Punkt, in welchem eine Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht, ist der Wendepunkt.

Diesen erhält man mithilfe der 2. und 3. Ableitung von  $f(x)$ :

$$f'(x) = -0,3x^2 - 0,6x + 0,4$$

$$f''(x) = -0,6x - 0,6$$

$$f'''(x) = -0,6$$

Die notwendige Bedingung  $f''(x) = 0$  führt zu:

$$-0,6x - 0,6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Wegen  $f'''(-1) \neq 0$  handelt es sich um eine Wendestelle.

Den zugehörigen  $y$ -Wert erhält man, indem man  $x = -1$  in  $f(x)$  einsetzt:

$$y = f(-1) = -0,1 \cdot (-1)^3 - 0,3 \cdot (-1)^2 + 0,4 \cdot (-1) + 3,2 = 2,6$$

Damit hat der Wendepunkt die Koordinaten  $W(-1 \mid 2,6)$ .

Um zu zeigen, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet, berechnet man mithilfe von  $f'(x)$  die Steigung  $m_A$  der Kurve im Punkt A:

$$m_A = f'(-3) = -0,3 \cdot (-3)^2 - 0,6 \cdot (-3) + 0,4 = -0,5$$

Die Steigung  $m_{AB}$  der Geraden durch A  $(-3 \mid 2)$  und B  $(3 \mid -1)$  erhält man mithilfe der Formel  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  für die Steigung zwischen zwei Punkten:

$$m_{AB} = \frac{-1 - 2}{3 - (-3)} = \frac{-3}{6} = -0,5$$

Es ist  $m_A = m_{AB}$ , daher mündet die Umgehungsstraße ohne Knick in die Ortsdurchfahrt ein.

- b) Den Flächeninhalt  $A_1$  der Fläche zwischen dem Schaubild von  $f(x)$  und der Geraden AB erhält man mithilfe eines Integrals.

Die Gleichung der Geraden  $g$  durch A und B erhält man mithilfe der Punkt-Steigungsform (PSF)  $y = m \cdot (x - x_Q) + y_Q$ . Setzt man die Koordinaten von A und  $m_{AB}$  in die PSF ein, ergibt sich:

$$g: y = -0,5 \cdot (x - (-3)) + 2$$

$$g: y = -0,5x - 1,5 + 2$$

$$g: y = -0,5x + 0,5$$

Da das Schaubild von  $f(x)$  oberhalb der Geraden verläuft, erhält man:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-3}^3 (f(x) - (-0,5x + 0,5)) dx \\ &= \int_{-3}^3 (-0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2 - (-0,5x + 0,5)) dx \\ &= \int_{-3}^3 (-0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,9x + 2,7) dx \\ &= [-0,025x^4 - 0,1x^3 + 0,45x^2 + 2,7x]_{-3}^3 \\ &= (-0,025 \cdot 3^4 - 0,1 \cdot 3^3 + 0,45 \cdot 3^2 + 2,7 \cdot 3) \\ &\quad - (-0,025 \cdot (-3)^4 - 0,1 \cdot (-3)^3 + 0,45 \cdot (-3)^2 + 2,7 \cdot (-3)) \\ &= 10,8 \end{aligned}$$

Das Gemeindegebiet zwischen der Umgehungsstraße und der Ortsdurchfahrt ist ein Halb-

kreis mit Radius  $r = 1,5$ . Damit gilt für den Flächeninhalt  $A_2$  des Halbkreises:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1,5^2 \approx 3,53$$

Den Flächeninhalt  $A_3$  der Fläche, die von den beiden Straßen eingeschlossen wird, jedoch außerhalb des Gemeindegebiets liegt, erhält man durch:

$$A_3 = A_1 - A_2 \approx 10,8 - 3,53 = 7,27$$

Den prozentualen Anteil von  $A_3$  zu  $A_1$  erhält man, indem man  $A_3$  durch  $A_1$  teilt:

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{7,27}{10,8} \approx 0,67 = 67\%$$

Somit liegen etwa 67% der Fläche außerhalb des Gemeindegebiets.

- c) Um zu zeigen, dass der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt  $B(2 | 2)$  genau in Fahrtrichtung vor sich sieht, stellt man die Gleichung der Tangente  $t$  im Punkt  $B(2 | 2)$  auf. Die Steigung  $m_t$  in  $B$  erhält man, indem man den  $x$ -Wert von  $B$  in  $f'(x)$  einsetzt:

$$m_t = f'(2) = -0,3 \cdot 2^2 - 0,6 \cdot 2 + 0,4 = -2$$

Setzt man  $m_t = -2$  und die Koordinaten von  $B(2 | 2)$  in die Tangentengleichung  $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$  ein, ergibt sich:

$$t: y = -2 \cdot (x - 2) + 2$$

$$t: y = -2x + 6$$

Um zu prüfen, ob der Punkt  $P(1,5 | 3)$  auf  $t$  liegt, setzt man die Koordinaten von  $P$  in die Tangentengleichung ein:

$$3 = -2 \cdot 1,5 + 6 \Leftrightarrow 3 = 3$$

Aufgrund der wahren Aussage liegt  $P$  auf  $t$ .

Somit sieht der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt  $B(2 | 2)$  genau in Fahrtrichtung vor sich.

Die Gerade  $AB$  der Ortsdurchfahrt hat die Steigung  $m_{AB} = -0,5$ .

Im Punkt  $R$ , in welchem ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt fährt, muss die Steigung ebenfalls  $-0,5$  betragen.

Also löst man die Gleichung  $f'(x) = -0,5$  nach  $x$  auf:

$$-0,3x^2 - 0,6x + 0,4 = -0,5$$

$$-0,3x^2 - 0,6x + 0,9 = 0$$

Mithilfe der  $abc$ -Formel erhält man die Lösungen  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -3$ .

Da  $x_2 = -3$  der  $x$ -Wert des Punktes A ist, kommt nur  $x_1 = 1$  als Lösung in Frage.

Den  $y$ -Wert des Punktes R erhält man, indem man  $x = 1$  in  $f(x)$  einsetzt:

$$y = f(1) = -0,1 \cdot 1^3 - 0,3 \cdot 1^2 + 0,4 \cdot 1 + 3,2 = 3,2$$

Somit hat der Punkt R die Koordinaten  $R(1 \mid 3,2)$ .

### Aufgabe A 2.2

Es ist  $f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;  $a > 0$ .

a) Die Periode  $p_a$  von  $f_a(x)$  ist  $p_a = \frac{2\pi}{a}$ .

Die Koordinaten des Hochpunkts  $H_a$  von  $K_a$  für  $0 \leq x < \frac{2\pi}{a}$  erhält man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von  $f_a$ , die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= a \cdot \cos(ax) \cdot a = a^2 \cdot \cos(ax) \\ f_a''(x) &= -a^2 \cdot \sin(ax) \cdot a = -a^3 \cdot \sin(ax) \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung  $f_a'(x) = 0$  führt zu  $a^2 \cdot \cos(ax) = 0$  bzw.  $\cos(ax) = 0$ .

Wegen  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  und  $\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$  ergeben sich als Lösungen:

$$ax = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2a} \quad \text{und} \quad ax = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow x_2 = \frac{3\pi}{2a}$$

Setzt man  $x_1 = \frac{\pi}{2a}$  und  $x_2 = \frac{3\pi}{2a}$  in  $f_a''(x)$  ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_a''\left(\frac{\pi}{2a}\right) &= -a^3 \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi}{2a}\right) = -a^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a^3 < 0 \quad (\text{da } a > 0) \\ f_a''\left(\frac{3\pi}{2a}\right) &= -a^3 \cdot \sin\left(a \cdot \frac{3\pi}{2a}\right) = -a^3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a^3 > 0 \quad (\text{da } a > 0) \end{aligned}$$

Wegen  $f_a''\left(\frac{\pi}{2a}\right) = -a^3 < 0$  handelt es sich für  $x = \frac{\pi}{2a}$  um einen Hochpunkt.

Den zugehörigen  $y$ -Wert erhält man, indem man  $x = \frac{\pi}{2a}$  in  $f_a(x)$  einsetzt:

$$y = f_a\left(\frac{\pi}{2a}\right) = a \cdot \sin\left(a \cdot \frac{\pi}{2a}\right) + a = a + a = 2a$$

Damit hat der Hochpunkt  $H_a$  die Koordinaten:

$$H_a\left(\frac{\pi}{2a} \mid 2a\right)$$

Um eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte liegen, zu ermitteln, löst man



$x = \frac{\pi}{2a}$  nach  $a$  auf und setzt das erhaltene Ergebnis in  $y = 2a$  ein:

$$x = \frac{\pi}{2a} \Rightarrow a = \frac{\pi}{2x}$$
$$y = 2a = 2 \cdot \frac{\pi}{2x} = \frac{\pi}{x}$$

Alle Hochpunkte  $H_a$  liegen auf einer Kurve mit der Gleichung  $y = \frac{\pi}{x}$ .

- b) Den Wendepunkt  $W_a$  von  $K_a$ , der den kleinsten positiven  $x$ -Wert hat, erhält man mithilfe der 2. und 3. Ableitung von  $f_a$ , die man mithilfe der Kettenregel bestimmt:

$$f_a''(x) = -a^3 \cdot \sin(ax)$$
$$f_a'''(x) = -a^3 \cdot \cos(ax) \cdot a = -a^4 \cdot \cos(ax)$$

Die notwendige Bedingung  $f_a''(x) = 0$  führt zu  $-a^3 \cdot \sin(ax) = 0$  bzw.  $\sin(ax) = 0$ .

Wegen  $\sin(0) = 0$ ,  $\sin(\pi) = 0$  und  $\sin(2\pi) = 0$  ergeben sich als Lösungen:

$$ax = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad ax = \pi \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{a} \quad \text{und} \quad ax = 2\pi \Rightarrow x_3 = \frac{2\pi}{a}$$

Setzt man den kleinsten positiven  $x$ -Wert, also  $x_2 = \frac{\pi}{a}$  in  $f_a'''(x)$  ein, ergibt sich:

$$f_a''' \left( \frac{\pi}{a} \right) = -a^4 \cdot \cos \left( a \cdot \frac{\pi}{a} \right) = a^4 \neq 0$$

Wegen  $f_a''' \left( \frac{\pi}{a} \right) = a^4 \neq 0$  handelt es sich um eine Wendestelle.

Den zugehörigen  $y$ -Wert erhält man, indem man  $x = \frac{\pi}{a}$  in  $f_a(x)$  einsetzt:

$$y = f_a \left( \frac{\pi}{a} \right) = a \cdot \sin \left( a \cdot \frac{\pi}{a} \right) + a = 0 + a = a$$

Damit hat der Wendepunkt  $W_a$  die Koordinaten:

$$W_a \left( \frac{\pi}{a} \mid a \right)$$