16 Kugeln

☐

In einem Gefäß G_1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
In einem Gefäß G_2 sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a) Aus Gefäß G_1 wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: Es wird mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen.
B: Es werden genau so viele schwarze Kugeln gezogen wie man erwartet.

b) Aus Gefäß G_2 wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen.

c) Aus G_1 und G_2 wird jeweils fünf Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass insgesamt mindestens neun schwarze Kugeln gezogen werden.

d) Nun werden aus G_1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G_2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus G_2 gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel schwarz ist.

16 Kugeln

a) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der schwarzen Kugeln bei 20 gezogenen Kugeln fest und bestimmen Sie die Parameter n und p. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A erhalten Sie mithilfe der kumulierten Binomialverteilung sowie der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B berechnen Sie zuerst den Erwartungswert von X mithilfe der Formel $E(X) = \mu = n \cdot p$. Anschließend verwenden Sie die Binomialverteilung.

b) Verwenden Sie für das 8-malige Ziehen einer Kugel aus Gefäß G_2 die Pfadregeln. Überlegen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass genau zwei schwarze Kugeln bei direkt aufeinander folgenden Zügen gezogen werden. Da es sich um Ziehen mit Zurücklegen handelt, ist die Wahrscheinlichkeit für jede Möglichkeit genau gleich groß.

c) Überlegen Sie, aus welchen drei Ereignissen A, B und C sich das Ereignis E: «Es werden mindestens neun schwarze Kugeln gezogen» zusammensetzt.
Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der schwarzen Kugeln aus G_1 mit den Parametern n und p_1 fest.
Legen Sie Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der schwarzen Kugeln aus G_2 mit den Parametern n und p_2 fest.
Bestimmen Sie mithilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C. Beachten Sie, dass das Ziehen aus G_1 unabhängig vom Ziehen aus G_2 ist:
$P(A) = P(X = 5) \cdot P(Y = 5)$, $P(B) = P(X = 4) \cdot P(Y = 5)$ und $P(C) = P(X = 5) \cdot P(Y = 4)$.
Addieren Sie die Ergebnisse.

d) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
Beachten Sie, dass die Anzahl der Kugeln insgesamt bei jedem Zug verschieden ist: Beim ersten Zug sind es 10 Kugeln, beim zweiten Zug 9 Kugeln (jeweils in Gefäß G_1) und beim dritten Zug 12 Kugeln (in Gefäß G_2). Überlegen Sie auch, wie viele schwarze und weiße Kugeln bei jedem Zug vorhanden sind. Verwenden Sie die Pfadregeln.

16 Kugeln

a) Wenn aus Gefäß G_1 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird, handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, da es nur die Ausgänge «schwarz» oder «weiß» gibt. Die Trefferwahrscheinlichkeit für «schwarz» beträgt $p = \frac{6}{10} = 0{,}6$. Da 20 Mal eine Kugel gezogen wird, ist die Länge der Bernoullikette $n = 20$. Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der schwarzen Kugeln fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0{,}6$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: »Mindestens 12 Mal wird eine schwarze Kugel gezogen», erhält man mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung:

frv.tv/ck

$$P(A) = P(X \geqslant 12) = 1 - P(X \leqslant 11) \approx 1 - 0{,}404 = 0{,}596 = 59{,}6\%$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt etwa $59{,}6\,\%$.
Um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: «Es werden genau so viele schwarze Kugeln gezogen wie man erwartet.» zu bestimmen, berechnet man zuerst den Erwartungswert von X:

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}6 = 12$$

Damit erhält man mithilfe der Binomialverteilung:

frv.tv/ci

$$P(B) = P(X = 12) \approx 0{,}180$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt etwa $18{,}0\,\%$.

b) Wenn aus Gefäß G_2 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird, erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C: »Genau 2 schwarze Kugeln werden bei direkt aufeinander folgenden Zügen gezogen» mithilfe der Pfadregeln. Bezeichnet man mit s: schwarze Kugel und mit w: weiße Kugel, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(sswwwwww) + P(wsswwwww) + P(wwsswwww) + P(wwwsswww) \\ &\quad + P(wwwwssww) + P(wwwwwssw) + P(wwwwwwss) \\ &= \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^6 \cdot 7 \\ &\approx 0{,}074 = 7{,}4\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen, beträgt ungefähr $7{,}4\,\%$.

c) Wenn aus beiden Gefäßen insgesamt mindestens neun schwarze Kugeln gezogen werden, so setzt sich dieses Ereignis E aus drei Ereignissen zusammen:
A: Aus G_1 und aus G_2 werden jeweils fünf schwarze Kugeln gezogen.
B: Aus G_1 werden genau vier schwarze Kugeln und aus G_2 werden fünf schwarze Kugeln gezogen.
C: Aus G_1 werden fünf schwarze Kugeln und aus G_2 werden genau vier schwarze Kugeln gezogen.
Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der schwarzen Kugeln aus G_1 fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p_1 = 0,6$.
Legt man Y als Zufallsvariable für die Anzahl der schwarzen Kugeln aus G_2 fest, so ist Y binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p_2 = 0,3$.
Da das Ziehen aus G_1 unabhängig vom Ziehen aus G_2 ist, erhält man mithilfe der Binomialverteilung:

frv.tv/ci

$$P(A) = P(X = 5) \cdot P(Y = 5) \approx 0,0778 \cdot 0,0024 \approx 0,0002$$
$$P(B) = P(X = 4) \cdot P(Y = 5) \approx 0,2592 \cdot 0,0024 \approx 0,0006$$
$$P(C) = P(X = 5) \cdot P(Y = 4) \approx 0,0778 \cdot 0,0284 \approx 0,0022$$

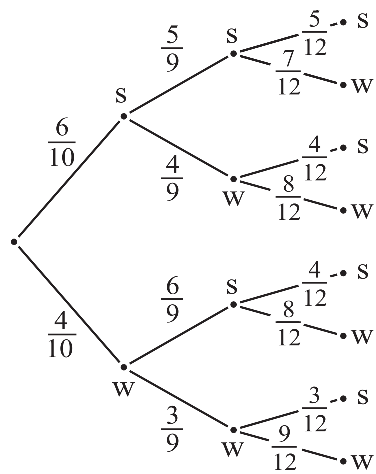
Somit ergibt sich:

$$P(E) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 0,0002 + 0,0006 + 0,0022 = 0,0030$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man insgesamt mindestens neun schwarze Kugeln zieht, beträgt etwa $0,3\%$.

d) Wenn aus G_1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G_2 gelegt werden, so ist die Anzahl der Kugeln insgesamt bei jedem Zug verschieden. Beim ersten Zug sind es 10 Kugeln, beim zweiten Zug 9 Kugeln (jeweils in Gefäß G_1) und beim dritten Zug 12 Kugeln (in Gefäß G_2). Auch die Anzahl der vorhandenen schwarzen und weißen Kugeln ändert sich bei jedem Zug.

Um die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C: «die zuletzt gezogene Kugel ist schwarz» zu berechnen, zeichnet man ein Baumdiagramm und verwendet die Pfadregeln. Bezeichnet man mit s: schwarze Kugel und mit w: weiße Kugel, so ergibt sich das nebenstehende Baumdiagramm.



Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C erhält man mithilfe der Pfadregeln:

$$\begin{aligned}
P(C) &= P(sss) + P(sws) + P(wss) + P(wws) \\
&= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{12} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{12} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{12} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{12} \\
&= \frac{7}{20} \\
&= 0,35 = 35\%
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die aus Gefäß G_2 gezogene Kugel schwarz ist, beträgt 35 %.