15 Flugzeug ☐

Die x_1x_2-Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt.
Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1\,(6 \mid 3 \mid 0)$.
Das Radar erfasst ein Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt $P\,(7 \mid 29 \mid 7)$ und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km}).$$

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, in welchem sich das Flugzeug um 7.01 Uhr befindet.
Erläutern Sie, woran Sie erkennen, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet.
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h.
Berechnen Sie den Winkel, unter welchem das Flugzeug auf den Boden zufliegt.
Bestimmen Sie die Uhrzeit und den Punkt, wo das Flugzeug bei Beibehaltung dieser Flugbahn auf dem Boden aufsetzen würde.

b) Eine weitere Radarstation befindet sich im Punkt $R_2\,(17 \mid 9 \mid 0)$.
Der Anflug des Testflugzeugs F_1 auf den Flugplatz ist optimal, wenn die Flugbahn f_1 und die beiden Radarstationen in einer Ebene liegen.
Prüfen Sie, ob das zutrifft.
Die Radarstation R_2 übernimmt die Flugüberwachung zu dem Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von R_1 entfernt.
Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der dies der Fall ist.

c) Die Flugbahn eines zweiten Testflugzeugs F_2 wird beschrieben durch

$$f_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km}).$$

Berechnen Sie die Entfernung der beiden Flugzeuge F_1 und F_2 um 7.04 Uhr.
Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen die beiden Flugzeuge einen Abstand von 10 km haben.

15 Flugzeug

a) Sie erhalten die Koordinaten eines Punktes Q, in dem sich das Flugzeug um 7.01 befindet, indem Sie $t = 1$ in f_1 einsetzen.
Zum Nachweis des Sinkflugs betrachten Sie die x_3-Komponente des Richtungsvektors der Flugbahn von f_1.
Die Geschwindigkeit in km/h erhalten Sie, indem Sie den Abstand von P zum berechneten Punkt Q berechnen und durch die benötigte Zeit $\frac{1}{60}$ Stunde teilen.
Den Neigungswinkel α zwischen der Flugbahn f_1 und der x_1x_2-Ebene erhalten Sie mithilfe des Richtungsvektors $\vec{u}_1$ von f_1 und des Normalenvektors $\vec{n}$ der x_1x_2-Ebene durch die Formel $\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{n}|}$.
Schneiden Sie f_1 mit der x_1x_2-Ebene $(x_3 = 0)$.

b) Stellen Sie mithilfe von R_1 und f_1 die Parameterform einer Ebene E auf; die Spannvektoren sind der Richtungsvektor $\vec{u}_1$ von f_1 und der Verbindungsvektor von R_1 zu P. Prüfen Sie, ob R_2 auch auf E liegt, indem Sie den Ortsvektor von R_2 in E einsetzen und das entstandene Gleichungssystem lösen.
Skizzieren Sie die Problemstellung. Das Flugzeug F_1 entfernt sich von R_1 ab demjenigen Zeitpunkt, an dem der Abstand von R_1 zu f_1 minimal ist. Hierzu stellen Sie eine zu f_1 orthogonale Hilfsebene E_H auf, die den Punkt R_1 enthält und deren Normalenvektor der Richtungsvektor $\vec{u}_1$ von f_1 ist; verwenden Sie die Punkt-Normalenform. Alternativ können Sie auch die Koordinaten eines gegebenen Punktes in den Ansatz $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ einsetzen und d bestimmen. Anschließend schneiden Sie E_H mit f_1.

c) Setzen Sie $t = 4$ in f_1 und f_2 ein und berechnen Sie den Abstand d der beiden zugehörigen Punkte A und B.
Bestimmen Sie den Abstand $d(t)$ der beiden Positionen A_t und B_t zum Zeitpunkt t, indem Sie den Betrag des Verbindungsvektors berechnen; anschließend lösen Sie die Gleichung $d(t) = 10$ durch Quadrieren nach t auf.

15 Flugzeug

Gegeben ist die Flugbahn $f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eines Flugzeugs F_1 (t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km).

a) Die Uhrzeit 7.01 Uhr entspricht $t = 1$; setzt man $t = 1$ in f_1 ein, erhält man:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Q}\,(10 \mid 27 \mid 6)$$

Also befindet sich das Flugzeug um 7.01 Uhr im Punkt $\mathrm{Q}\,(10 \mid 27 \mid 6)$.

Man kann erkennen, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet, da die x_3-Komponente des Richtungsvektors der Flugbahn negativ ist.

Die Geschwindigkeit v des Flugzeugs erhält man, indem man die in der ersten Minute zurückgelegte Wegstrecke $\overline{\mathrm{PQ}}$ durch die benötigte Zeit $\left(\frac{1}{60}\text{ Stunde}\right)$ teilt:

$$v = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\frac{1}{60}} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}{\frac{1}{60}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\frac{1}{60}} = \frac{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}{\frac{1}{60}} = 60 \cdot \sqrt{14} \approx 224,5$$

Das Flugzeug hat damit eine Geschwindigkeit von etwa $224,5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Den Neigungswinkel α zwischen der Flugbahn f_1 und der x_1x_2-Ebene erhält man mithilfe des Richtungsvektors $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ von f_1 und des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der x_1x_2-Ebene:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|3 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot 1} = \frac{|-1|}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 15,5^\circ$$

Das Flugzeug fliegt etwa unter einem Winkel von $15,5^\circ$ auf den Boden zu.

Schneidet man f_1 mit der x_1x_2-Ebene $(x_3 = 0)$, erhält man: $7 - t = 0 \Rightarrow t = 7$
Setzt man $t = 7$ in f_1 ein, ergibt sich:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{S}\,(28 \mid 15 \mid 0)$$

Also würde das Flugzeug um 7.07 Uhr im Punkt $\mathrm{S}\,(28 \mid 15 \mid 0)$ auf dem Boden aufsetzen.

b) Es ist zu prüfen, ob f_1, R_1 und R_2 in einer Ebene liegen, damit der Anflug optimal ist.
Die Ebene E, in der R_1 und f_1 liegen, hat die Spannvektoren

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \overrightarrow{\mathrm{PR}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -26 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Parametergleichung:

$$\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -26 \\ -7 \end{pmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R}$$

Um zu prüfen, ob $\mathrm{R}_2\,(17 \mid 9 \mid 0)$ auch in der Ebene E liegt, setzt man den Ortsvektor von R_2 in E ein und erhält folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llclclcl} \mathrm{I} & 17 & = & 7 & + & 3t & - & s \\ \mathrm{II} & 9 & = & 29 & - & 2t & - & 26s \\ \mathrm{III} & 0 & = & 7 & - & t & - & 7s \end{array}$$

Subtrahiert man das 2-fache von Gleichung III von Gleichung II, erhält man:

$$9 = 15 - 12s \Rightarrow s = 0,5$$

Setzt man $s = 0,5$ in Gleichung II ein, ergibt sich: $9 = 29 - 2t - 26 \cdot 0,5 \Rightarrow t = 3,5$
Setzt man $s = 0,5$ und $t = 3,5$ in Gleichung I ein, erhält man:

$$17 = 7 + 3 \cdot 3,5 - 0,5 \Rightarrow 17 = 17$$

Aufgrund der wahren Aussage liegt auch R_2 in der Ebene E und damit ist der Anflug optimal.

Das Flugzeug F_1 entfernt sich von R_1 ab demjenigen Zeitpunkt, an dem der Abstand von R_1 zu f_1 minimal ist.

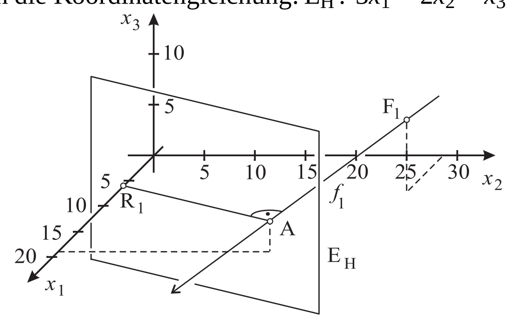
Hierzu stellt man eine zu f_1 orthogonale Hilfsebene $\mathrm{E_H}$ auf, die den Punkt $\mathrm{R_1}$ enthält und deren Normalenvektor der Richtungsvektor $\vec{u}_1$ von f_1 ist:

$$\mathrm{E_H}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\mathrm{E_H}: (x_1 - 6) \cdot 3 + (x_2 - 3) \cdot (-2) + (x_3 - 0) \cdot (-1) = 0$$
$$\mathrm{E_H}: 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 12$$

Alternativ kann man auch die Koordinaten des Punktes $\mathrm{R_1}(6 \mid 3 \mid 0)$ in den Ansatz $3x_1 - 2x_2 - x_3 = d$ einsetzen:

$$3 \cdot 6 - 2 \cdot 3 - 0 = d \;\Rightarrow\; d = 12$$

Damit erhält man die Koordinatengleichung: $\mathrm{E_H}:\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 12$.



Schneidet man $\mathrm{E_H}$ mit f_1 ergibt sich der Schnittpunkt A zum gesuchten Zeitpunkt t:

$$3 \cdot (7 + 3t) - 2 \cdot (29 - 2t) - (7 - t) = 12 \;\Rightarrow\; t = 4$$

Damit übernimmt die Radarstation $\mathrm{R_2}$ um 7.04 Uhr die Flugüberwachung.

c) Um zu bestimmen, wie weit die Flugzeuge $\mathrm{F_1}$ und $\mathrm{F_2}$ um 7.04 Uhr voneinander entfernt sind, setzt man $t = 4$ in f_1 und f_2 ein und berechnet den Abstand d der beiden zugehörigen Punkte A und B:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{A}(19 \mid 21 \mid 3)$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathrm{B}(26 \mid 19 \mid 7)$$

$$d = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{69} \approx 8,31$$

Die beiden Flugzeuge sind um 7.04 Uhr etwa $8,3\,\mathrm{km}$ voneinander entfernt.

Um zu berechnen, zu welchem Zeitpunkt die beiden Flugzeuge einen Abstand von $10\,\mathrm{km}$ haben, wird zuerst der Abstand $d(t)$ der beiden Positionen $\mathrm{A}_t\,(7+3t \mid 29-2t \mid 7-t)$ von F_1 und $\mathrm{B}_t\,(18+2t \mid 11+2t \mid 7)$ von F_2 zum Zeitpunkt t bestimmt:

$$d(t) = \left|\overrightarrow{\mathrm{A}_t\mathrm{B}_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} 11-t \\ -18+4t \\ t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(11-t)^2 + (-18+4t)^2 + t^2}$$

Anschließend löst man die Gleichung $d(t) = 10$ durch Quadrieren nach t auf:

$$\begin{aligned} \sqrt{(11-t)^2 + (-18+4t)^2 + t^2} &= 10 \\ (11-t)^2 + (-18+4t)^2 + t^2 &= 100 \\ 121 - 22t + t^2 + 324 - 144t + 16t^2 + t^2 &= 100 \\ 18t^2 - 166t + 345 &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe der *abc*-Formel erhält man $t_1 \approx 3,16$ und $t_2 \approx 6,06$.
Somit haben die beiden Flugzeuge etwa um 7.03 Uhr und um 7.06 Uhr einen Abstand von $10\,\mathrm{km}$.