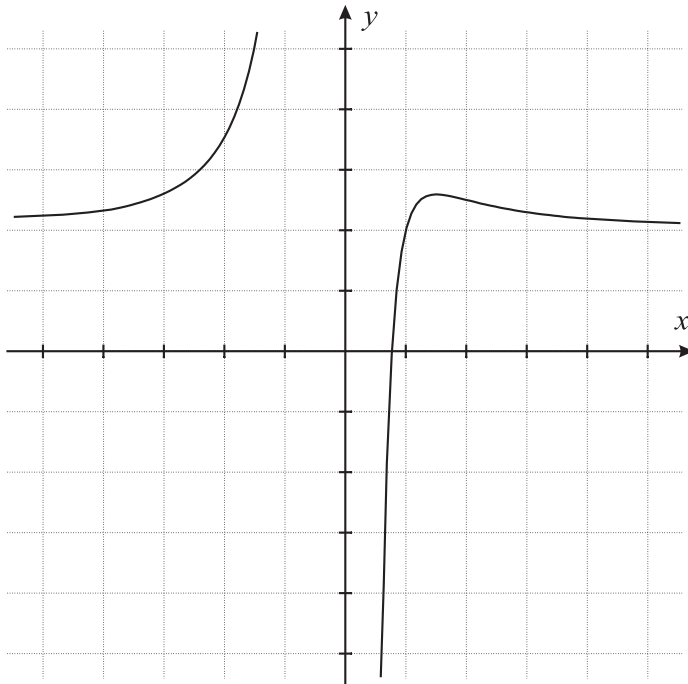


Regen



Aufgabe A 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 2$; $x \neq 0$.
Der Graph K von f ist durch folgende Abbildung gegeben:



- a) Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von K an.
Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts von K .
Ergänzen Sie in der Abbildung die Skalierungen der Koordinatenachsen.
Untersuchen Sie f für $x < 0$ auf Monotonie und bestimmen Sie das Krümmungsverhalten von K .
Betrachtet wird die Gleichung $f(x) = c$.
Geben Sie ohne weitere Rechnung an, für welche Werte von c diese Gleichung eine oder mehrere Lösungen hat.
- b) Die Tangente und die Normale an K an der Stelle $x = 1$ begrenzen mit der y -Achse ein Dreieck.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

- c) K begrenzt mit der Geraden $y = 2$ und der Geraden $x = u$ ($u > 1$) eine Fläche.

Berechnen Sie für $u = 2$ den Flächeninhalt dieser Fläche.

Bestimmen Sie u so, dass diese Fläche den Inhalt 1 FE hat.

Ermitteln Sie, wie groß diese Fläche maximal werden kann.

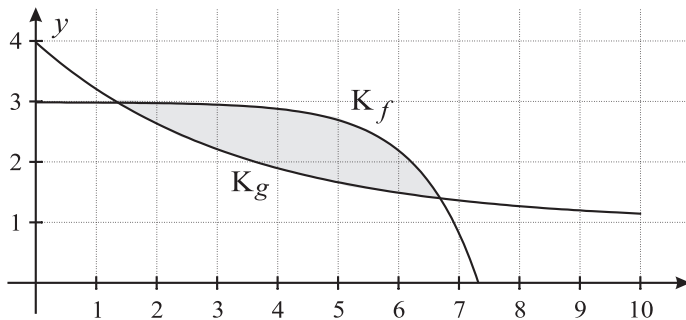
- d) K wird an der Geraden $y = 2$ gespiegelt. Es entsteht der Graph einer Funktion g .

Bestimmen Sie einen Term von g .

Aufgabe A 1.2

Die Funktion f beschreibt die Niederschlagsrate eines Dauerregens, die Funktion g die Wasserabflussrate (t in Stunden seit Einsetzen des Regens, $f(t)$ und $g(t)$ in Liter pro m^2 pro Stunde).

Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g :



- a) Beschreiben Sie den Verlauf der Intensität des Regens.

Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitpunkt, wann der Regen aufhört.

Geben Sie einen Rechenausdruck an, mit dem man die gesamte Niederschlagsmenge während des Regens bestimmen kann.

- b) Erläutern Sie die Bedeutung der grauen Fläche.

Bestimmen Sie eine Gleichung, mit der man berechnen kann, zu welchem Zeitpunkt T alle Pfützen verschwunden sind.

Regen

Aufgabe A 1.1

- a) Die Gleichung der senkrechten Asymptote erhalten Sie, indem Sie die Nenner der Brüche gleich Null setzen.

Die Gleichung der waagrechten Asymptote erhalten Sie, indem Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$ betrachten.

Die Koordinaten des Hochpunkts von K erhalten Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von f . Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f'(x) = 0$ nach x auf. Setzen Sie den erhaltenen x -Wert in $f''(x)$ ein; falls das Ergebnis kleiner als Null ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. Den zugehörigen y -Wert erhalten Sie, indem Sie den x -Wert in $f(x)$ einsetzen. Mithilfe der berechneten Werte können Sie die Koordinatenachsen skalieren.

Um das Monotonieverhalten von f für $x < 0$ zu untersuchen, betrachten Sie $f'(x)$; falls $f'(x) > 0$ ist, ist f streng monoton wachsend. Um das Krümmungsverhalten des Graphen von f für $x < 0$ zu untersuchen, betrachten Sie $f''(x)$; falls $f''(x) > 0$, ist der Graph von f linksgekrümmt. Bestimmen Sie anhand der gegebenen Abbildung und der berechneten Werte die Anzahl der Schnittstellen des Graphen von f mit der Geraden $y = c$, die parallel zu x -Achse verläuft.

- b) Die Tangente t und die Normale n an K an der Stelle $x = 1$ erhalten Sie, indem Sie den zugehörigen y -Wert und die Steigungen von t und n im Berührungspunkt B bestimmen. Den y -Wert erhalten Sie, indem Sie den x -Wert in $f(x)$ einsetzen. Die Steigung m_t in B erhalten Sie, indem Sie den x -Wert von B in $f'(x)$ einsetzen. Anschließend verwenden Sie die Tangentengleichung $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$. Die Steigung m_n der Normalen ist der negative Kehrwert der Steigung der Tangente: $m_n = -\frac{1}{m_t}$. Verwenden Sie die Normalengleichung $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$. Die Schnittpunkte S_1 bzw. S_2 von t bzw. n mit der y -Achse erhalten Sie, indem Sie jeweils $x = 0$ in die entsprechenden Gleichungen einsetzen. Skizzieren Sie das Dreieck. Den Flächeninhalt A dieses Dreiecks erhalten Sie mit der Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$.

Als Grundseite verwenden Sie $g = \overline{S_1 S_2}$. Die zugehörige Höhe h steht senkrecht dazu und geht durch B .

- c) Den Flächeninhalt A der Fläche, die K mit der Geraden $y = 2$ und der Geraden $x = 2$ begrenzt, erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Beachten Sie, dass K oberhalb der Geraden verläuft. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Den Flächeninhalt $A(u)$ der Fläche, die K mit der Geraden $y = 2$ und der Geraden $x = u$ ($u > 1$) begrenzt, erhalten Sie ebenfalls mithilfe eines Integrals. Um u so zu bestimmen, dass diese Fläche den Inhalt 1 FE hat, lösen Sie die Gleichung $A(u) = 1$ nach u auf. Verwenden Sie die abc -Formel. Beachten Sie wegen $u > 1$, dass es nur eine Lösung gibt.

Um zu ermitteln, wie groß die nach rechts ins Unendliche reichende Fläche maximal werden kann, bestimmen Sie den Grenzwert von $A(u)$ für $u \rightarrow \infty$.

- d) Um K an der Geraden $y = 2$ zu spiegeln, verschieben Sie zuerst K um 2 LE nach unten, spiegeln an der x -Achse und verschieben den gespiegelten Graphen anschließend wieder um 2 LE nach oben.

Aufgabe A 1.2

- a) Beschreiben Sie anhand des Graphen von f , in welchem Zeitraum die Niederschlagsrate gleichbleibend hoch ist und wie sie sich anschließend verändert. Bestimmen Sie näherungsweise die Nullstelle von f . Um die gesamte Niederschlagsmenge M während des Regens zu bestimmen, verwenden Sie ein Integral, da alle Niederschlagsraten während des Regens summiert werden müssen.
- b) Bestimmen Sie näherungsweise die Schnittstellen der Graphen von f und g . Beachten Sie, dass bei der schraffierten Fläche, die von den Graphen von f und g eingeschlossen wird, der Graph von f oberhalb des Graphen von g verläuft. Überlegen Sie, welches Integral zur schraffierten Fläche gehört und welche Summe damit berechnet wird.
Einen Rechenausdruck, mit dem man berechnen kann, zu welchem Zeitpunkt T alle Pfützen verschwunden sind, erhalten Sie mithilfe von Integralen. Überlegen Sie, wie die einzelnen Abflussmengen berechnet werden können.

Regen

Aufgabe A 1.1

Es ist $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 2$; $x \neq 0$.

- a) Die Gleichung der senkrechten Asymptote erhält man, indem man die Nenner der Brüche gleich Null setzt: $x^2 = 0$ und $x^3 = 0$ führen jeweils zu $x = 0$.

Die Gleichung der waagrechten Asymptote erhält man, indem man das Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$ betrachtet:

Für $x \rightarrow \pm\infty$ gehen die Brüche $\frac{4}{x^2}$ und $\frac{4}{x^3}$ jeweils gegen Null, also geht $f(x)$ gegen 2, also ist $y = 2$ eine waagrechte Asymptote.

Somit hat K die Asymptoten $x = 0$ und $y = 2$.

Die Koordinaten des Hochpunkts von K erhält man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von f . Mit $f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 2 = 4x^{-2} - 4x^{-3} + 2$ ergibt sich:

$$f'(x) = -8x^{-3} + 12x^{-4} = -\frac{8}{x^3} + \frac{12}{x^4}$$

$$f''(x) = 24x^{-4} - 48x^{-5} = \frac{24}{x^4} - \frac{48}{x^5}$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $f'(x) = 0$ nach x auf:

$$-\frac{8}{x^3} + \frac{12}{x^4} = 0$$

$$-8x + 12 = 0$$

$$x = 1,5$$

Setzt man $x = 1,5$ in $f''(x)$ ein, ergibt sich:

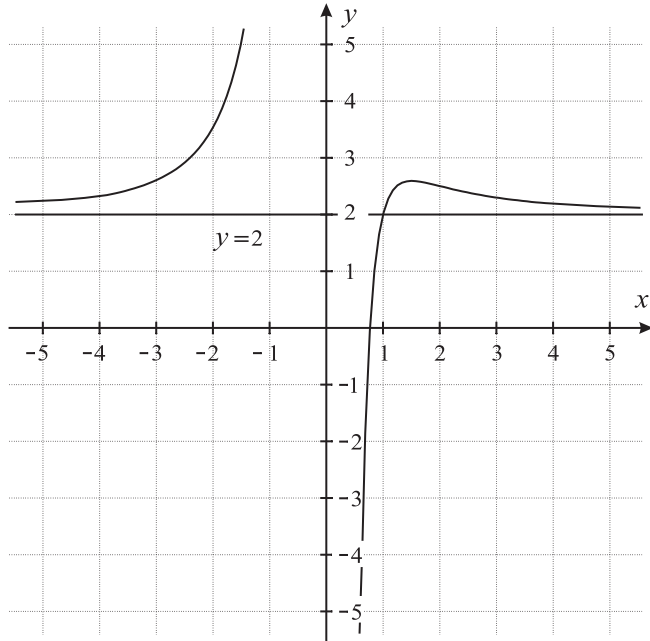
$$f''(1,5) = \frac{24}{1,5^4} - \frac{48}{1,5^5} = -\frac{128}{81} < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

Den zugehörigen y -Wert erhält man, indem man $x = 1,5$ in $f(x)$ einsetzt:

$$y = f(1,5) = \frac{4}{1,5^2} - \frac{4}{1,5^3} + 2 = \frac{70}{27} \approx 2,59$$

Somit hat der Hochpunkt von K die Koordinaten $H(1,5 \mid \frac{70}{27})$.

Damit kann man in der Abbildung die Skalierungen der Koordinatenachsen ergänzen:



Um das Monotonieverhalten von f für $x < 0$ zu untersuchen, betrachtet man die Ableitung $f'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{12}{x^4}$:

Für $x < 0$ ist $x^3 < 0$ und damit der Bruch $-\frac{8}{x^3} > 0$.

Für $x < 0$ ist der Bruch $\frac{12}{x^4} > 0$, damit gilt:

$$f'(x) > 0 \text{ für } x < 0$$

Somit ist f für $x < 0$ streng monoton wachsend.

Um das Krümmungsverhalten des Graphen von f für $x < 0$ zu untersuchen, betrachtet man

$$f''(x) = \frac{24}{x^4} - \frac{48}{x^5}$$

Für $x < 0$ ist der Bruch $\frac{24}{x^4} > 0$.

Für $x < 0$ ist $x^5 < 0$ und damit der Bruch $-\frac{48}{x^5} > 0$, damit gilt:

$$f''(x) > 0 \text{ für } x < 0$$

Somit ist der Graph von f für $x < 0$ linksgekrümmt.

Um ohne weitere Rechnung anzugeben, für welche Werte von c die Gleichung $f(x) = c$ keine, eine oder mehrere Lösungen hat, bestimmt man anhand der gegebenen Abbildung und der berechneten Werte die Schnittstellen des Graphen von f mit der Geraden $y = c$, die parallel zur x -Achse verläuft:

Für $c \leq 2$ gibt es eine Schnittstelle, für $2 < c < \frac{70}{27}$ gibt es drei Schnittstellen, für $c = \frac{70}{27}$ gibt es zwei Schnittstellen und für $c > \frac{70}{27}$ gibt es wieder eine Schnittstelle.
Somit hat die gegebene Gleichung für $xc \leq 2$ oder $c > \frac{70}{27}$ eine Lösung, für $2 < c < \frac{70}{27}$ drei Lösungen und für $c = \frac{70}{27}$ zwei Lösungen.

- b) Die Tangente t und die Normale n an K an der Stelle $x = 1$ erhält man, indem man den zugehörigen y -Wert und die Steigungen von t und n bestimmt. Den y -Wert erhält man, indem man $x = 1$ in $f(x)$ einsetzt:

$$y = f(1) = \frac{4}{1^2} - \frac{4}{1^3} + 2 = 2 \Rightarrow B(1 | 2)$$

Die Steigung m_t in B erhält man, indem man den x -Wert von B in $f'(x)$ einsetzt:

$$m_t = f'(1) = -\frac{8}{1^3} + \frac{12}{1^4} = 4$$

Setzt man $m_t = 4$ und die Koordinaten von B(1 | 2) in die Tangentengleichung $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ ein, ergibt sich:

$$t: y = 4 \cdot (x - 1) + 2$$

$$t: y = 4x - 2$$

Die Steigung m_n der Normalen ist der negative Kehrwert der Steigung der Tangente:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{4}$$

Setzt man $m_n = -\frac{1}{4}$ und die Koordinaten von B(1 | 2) in die Normalengleichung $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ ein, ergibt sich:

$$n: y = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1) + 2$$

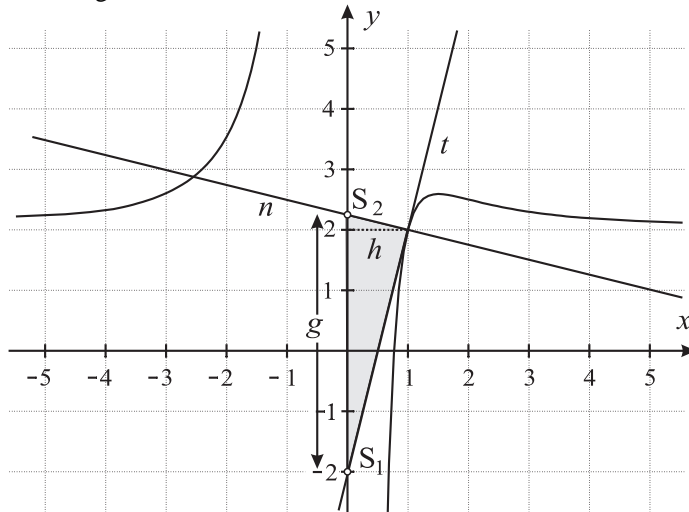
$$n: y = -\frac{1}{4}x + 2,25$$

Die Schnittpunkte S_1 bzw. S_2 von t bzw. n mit der y -Achse erhält man, indem man jeweils $x = 0$ in die entsprechenden Gleichungen einsetzt:

$$y_1 = 4 \cdot 0 - 2 = -2 \Rightarrow S_1(0 | -2)$$

$$y_2 = -\frac{1}{4} \cdot 0 + 2,25 = 2,25 \Rightarrow S_2(0 | 2,25)$$

Damit erhält man folgendes Dreieck:



Den Flächeninhalt A dieses Dreiecks erhält man mit der Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$.

Mit $g = \overline{S_1 S_2} = 4,25$ und $h = 1$ ergibt sich:

$$A = \frac{4,25 \cdot 1}{2} = \frac{17}{8} = 2,125$$

Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von 2,125 FE.

- c) Den Flächeninhalt A der Fläche, die K mit der Geraden $y = 2$ und der Geraden $x = 2$ begrenzt, erhält man mithilfe eines Integrals. Da K oberhalb von der Geraden verläuft, gilt:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 (f(x) - 2) dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 2 - 2 \right) dx \\ &= \int_1^2 (4x^{-2} - 4x^{-3}) dx \\ &= \left[\frac{4}{-1} x^{-1} - \frac{4}{-2} x^{-2} \right]_1^2 \\ &= \left[-\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} \right]_1^2 \\ &= -\frac{4}{2} + \frac{2}{2^2} - \left(-\frac{4}{1} + \frac{2}{1^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt 0,5 FE.

Den Flächeninhalt $A(u)$ der Fläche, die K mit der Geraden $y = 2$ und der Geraden $x = u$ ($u > 1$) begrenzt, erhält man ebenfalls mithilfe eines Integrals. Da K oberhalb von der Geraden verläuft, gilt:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^u (f(x) - 2) dx \\
 &= \int_1^u \left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 2 - 2 \right) dx \\
 &= \int_1^u (4x^{-2} - 4x^{-3}) dx \\
 &= \left[\frac{4}{-1}x^{-1} - \frac{4}{-2}x^{-2} \right]_1^u \\
 &= \left[-\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} \right]_1^u \\
 &= -\frac{4}{u} + \frac{2}{u^2} - \left(-\frac{4}{1} + \frac{2}{1^2} \right) \\
 &= 2 - \frac{4}{u} + \frac{2}{u^2}
 \end{aligned}$$

Um u so zu bestimmen, dass diese Fläche den Inhalt 1 FE hat, löst man die Gleichung $A(u) = 1$ nach u auf:

$$\begin{aligned}
 2 - \frac{4}{u} + \frac{2}{u^2} &= 1 \\
 u^2 - 4u + 2 &= 0
 \end{aligned}$$

Mithilfe der *abc*-Formel erhält man folgende Lösungen:

$$u_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,41 \text{ und } u_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0,59.$$

Wegen $u > 1$ kommt nur $u \approx 3,41$ als Lösung in Frage.

Somit hat die Fläche für $u \approx 3,41$ einen Flächeninhalt von 1 FE.

Um zu ermitteln, wie groß die nach rechts ins Unendliche reichende Fläche maximal werden kann, bestimmt man den Grenzwert von $A(u) = 2 - \frac{4}{u} + \frac{2}{u^2}$ für $u \rightarrow \infty$. Da die beiden Brüche für $u \rightarrow \infty$ gegen Null gehen, geht $A(u)$ gegen 2. Somit kann die Fläche maximal einen Flächeninhalt von 2 FE haben.

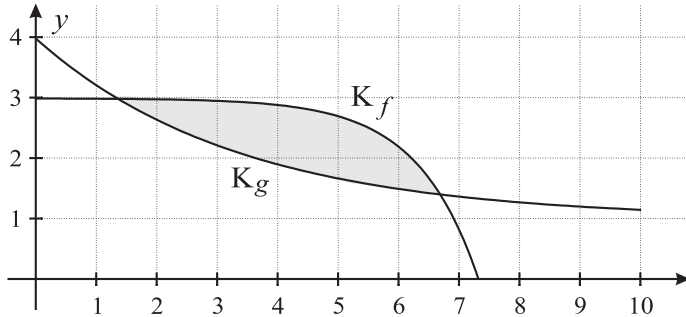
- d) Um K an der Geraden $y = 2$ zu spiegeln, verschiebt man zuerst K um 2 LE nach unten, spiegelt an der x -Achse und verschiebt den gespiegelten Graphen anschließend wieder um 2 LE nach oben.

Damit erhält man für die Funktion g folgenden Term:

$$g(x) = -(f(x) - 2) + 2 = -\left(\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^3} + 2 - 2 \right) + 2 = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} + 2$$

Aufgabe A 1.2

Die Funktion f beschreibt die Niederschlagsrate eines Dauerregens, die Funktion g die Wasserabflussrate (t in Stunden seit Einsetzen des Regens, $f(t)$ und $g(t)$ in Liter pro m^2 pro Stunde).



- a) Anhand des Graphen von f kann man erkennen, dass der Regen etwa die ersten fünf Stunden nahezu gleichbleibend stark ist mit einer Niederschlagsrate von etwa 3 Liter pro m^2 pro Stunde, anschließend lässt er recht schnell nach. Etwa nach 7,3 Stunden hört der Regen auf, da die Nullstelle von f bei $t \approx 7,3$ ist. Die gesamte Niederschlagsmenge M während des Regens kann man mithilfe eines Integrals bestimmen, da alle Niederschlagsraten während des Regens summiert werden:

$$M = \int_0^{7,3} f(t) dt$$

- b) Die Graphen von f und g haben näherungsweise die Schnittstellen $t_1 \approx 1,4$ und $t_2 \approx 6,7$. Da der Graph von f oberhalb des Graphen von g verläuft, ist in diesem Zeitraum die Niederschlagsrate größer als die Wasserabflussrate. Somit bilden sich Pfützen. Die schraffierte Fläche, die von den beiden Graphen eingeschlossen wird, kann näherungsweise durch das Integral $W = \int_{1,4}^{6,7} (f(t) - g(t)) dt$ berechnet werden und beschreibt die Wassermenge W , die zwischen 1,4 und 6,7 Stunden nicht abfließen konnte. Eine Gleichung, mit der man berechnen kann, zu welchem Zeitpunkt T alle Pfützen verschwunden sind, erhält man mithilfe von Integralen. Im Zeitraum von 6,7 bis 7,3 Stunden kann der Abfluss durch $A_1 = \int_{6,7}^{7,3} (g(t) - f(t)) dt$ beschrieben werden. Wenn der Regen aufgehört hat, kann der Abfluss bis zu einem Zeitpunkt T durch $A_2 = \int_{7,3}^T g(t) dt$ beschrieben werden. Da die Wassermenge W , die sich zwischen 1,4 und 6,7 Stunden gebildet hat, vollständig bis zum Zeitpunkt T abfließen soll, muss gelten:

$$W = A_1 + A_2$$

$$\int_{1,4}^{6,7} (f(t) - g(t)) dt = \int_{6,7}^{7,3} (g(t) - f(t)) dt + \int_{7,3}^T g(t) dt$$