23 Platte ☐

Tipps ab Seite 47, Lösungen ab Seite 96

An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten $A\,(10 \mid 6 \mid 0)$, $B\,(0 \mid 6 \mid 0)$, $C\,(0 \mid 0 \mid 3)$ und $D\,(10 \mid 0 \mid 3)$ ist im Punkt $F\,(5 \mid 6 \mid 0)$ ein 2 m langer Stab befestigt, der in positive x_3-Richtung zeigt.

Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt $L\,(8 \mid 10 \mid 2)$ (Koordinatenangaben in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt.
Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Abstand des oberen Endes S des Stabes von der Ebene E.
Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.
(Teilergebnis: $E: x_2 + 2x_3 = 6$)

b) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes.
Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist. Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte.

23 Platte

a) Verwenden Sie für die Parametergleichung der Ebene E, in der die Platte mit den Eckpunkten A, B und C liegt, beispielsweise den Stützpunkt A und die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E erhalten Sie mithilfe des Kreuzprodukts (siehe Seite 42) der Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Alternativ können Sie $\vec{n}$ auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ sowohl auf $\overrightarrow{AB}$ als auch auf $\overrightarrow{AC}$ senkrecht steht. Eine Koordinatengleichung von E erhalten Sie mithilfe der Punkt-Normalenform: $(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$. Alternativ können Sie auch die Koordinaten eines gegebenen Punktes in den Ansatz $ax_1+bx_2+cx_3=d$ einsetzen und d bestimmen. Bestimmen Sie die Koordinaten des oberen Endes des Stabes. Den Abstand d des oberen Endes S des Stabes von der Ebene E erhalten Sie mithilfe der Abstandsformel.
Den Winkel zwischen dem Stab und der Platte erhalten Sie mit der Formel $\sin\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{r}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|}$, wobei $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E und $\vec{r}$ ein Richtungsvektor der Geraden ist, auf welcher der Stab liegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S des oberen Endes des Stabes.
Den Schattenpunkt S^* des oberen Endes des Stabes auf der Platte erhalten Sie, indem Sie die Gerade g durch die Punkte S und L aufstellen und mit der Ebene E, in der die Platte liegt, schneiden. Setzen Sie dazu den allgemeinen Punkt P_t von g in die Koordinatengleichung von E ein und lösen Sie die Gleichung nach t auf. Anschließend setzen Sie den erhaltenen t-Wert in P_t ein.
Um zu begründen, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt, prüfen Sie, ob das untere Ende des Stabes auf der Platte liegt und anhand von Koordinatenvergleichen, ob der Schattenpunkt S^* auf der Platte liegt.

c) Überlegen Sie, in welcher Ebene K sich die Kreisbahn befindet. Bestimmen Sie die Gleichung der Schnittgeraden s der Ebene K und E, indem Sie das zugehörige Gleichungssystem lösen. Die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte erhalten Sie, indem Sie den Abstand eines allgemeinen Punktes P_t von s zum Mittelpunkt S des Kreises gleichsetzen mit dem Radius r der Kreisbahn.
Den Radius r der Kreisbahn erhalten Sie, indem Sie den Abstand von S zu L mithilfe des Betrags des zugehörigen Verbindungsvektors bestimmen. Den Abstand d_t eines allgemeinen Punktes P_t von s zum Mittelpunkt S des Kreises erhalten Sie ebenfalls mithilfe des Betrags des zugehörigen Verbindungsvektors. Lösen Sie die Gleichung $d_t=r$ durch Quadrieren nach t auf. Setzen Sie die erhaltenen t-Werte in P_t ein.

23 Platte

Gegeben sind die Punkte $A\,(10\mid 6\mid 0)$, $B\,(0\mid 6\mid 0)$, $C\,(0\mid 0\mid 3)$, $D\,(10\mid 0\mid 3)$, $F\,(5\mid 6\mid 0)$ und $L\,(8\mid 10\mid 2)$.

a) Die Ebene E, in der die Platte mit den Eckpunkten $A\,(10\mid 6\mid 0)$, $B\,(0\mid 6\mid 0)$ und $C\,(0\mid 0\mid 3)$ liegt, hat beispielsweise den Stützpunkt A und die Spannvektoren

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Damit hat E die Parametergleichung:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix};\ s,t \in \mathbb{R}$$

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E erhält man mithilfe des Kreuzprodukts (siehe Seite 42) der Spannvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man $\vec{n}$ auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ auf beiden Spannvektoren senkrecht steht. Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & n_1 & + & 0 \cdot n_2 & + & 0 \cdot n_3 & = & 0 \\ \text{II} & -10n_1 & - & 6n_2 & + & 3n_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus Gleichung I ergibt sich: $n_1 = 0$.
Setzt man $n_1 = 0$ in Gleichung II ein, erhält man: $-6n_2 + 3n_3 = 0$.
Wählt man in Gleichung II z.B. $n_3 = 2$, erhält man: $-6n_2 + 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow n_2 = 1$

Damit ergibt sich ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

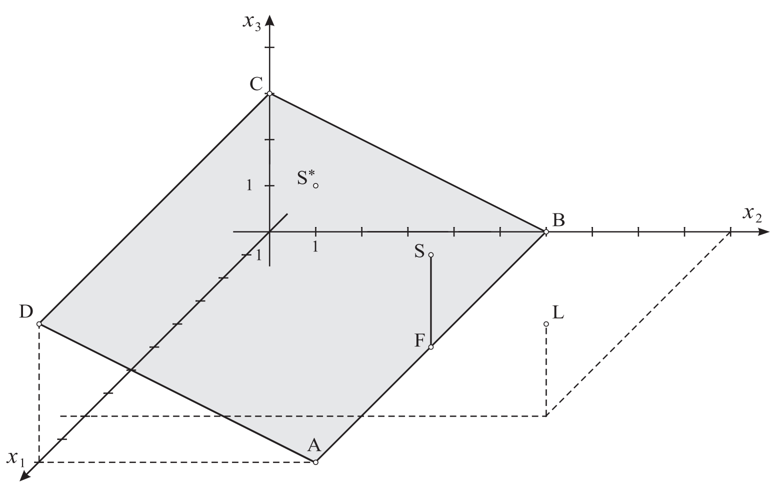
Eine Koordinatengleichung von E erhält man mithilfe der Punkt-Normalenform:

$$\text{E}\colon (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$$
$$\text{E}\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\text{E}\colon (x_1 - 10) \cdot 0 + (x_2 - 6) \cdot 1 + (x_3 - 0) \cdot 2 = 0$$
$$\text{E}\colon x_2 - 6 + 2x_3 = 0$$
$$\text{E}\colon x_2 + 2x_3 = 6$$

Alternativ kann man auch die Koordinaten des Punktes A $(10 \mid 6 \mid 0)$ in den Ansatz $x_2 + 2x_3 = d$ einsetzen:

$$6 + 2 \cdot 0 = d \Rightarrow d = 6$$

Die Ebene E hat die Koordinatengleichung E: $x_2 + 2x_3 = 6$.



Das obere Ende des Stabes hat die Koordinaten S $(5 \mid 6 \mid 2)$.
Den Abstand d des oberen Endes S des Stabes von der Ebene E: $x_2 + 2x_3 = 6$ erhält man mithilfe der Abstandsformel:

$$\text{d} = \frac{|6 + 2 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1,79$$

Der Abstand des oberen Endes des Stabes von der Ebene E beträgt etwa $1,79\,\text{m}$.

Den Winkel zwischen dem Stab und der Platte erhält man mit der Formel $\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{r}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|}$, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor der Geraden ist, auf der der Stab liegt. Damit erhält man:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{r}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{r}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|0\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 1|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow\ \alpha \approx 63{,}4^\circ$$

Der Winkel zwischen dem Stab und der Platte beträgt etwa $63{,}4^\circ$.

b) Das obere Ende des Stabes hat die Koordinaten $\mathrm{S}\,(5\mid 6\mid 2)$.
Den Schattenpunkt S^* des oberen Endes des Stabes auf der Platte erhält man, indem man die Gerade g durch die Punkte S und L aufstellt und mit der Ebene E, in der die Platte liegt, schneidet. Die Gerade g hat die Gleichung:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den Schnittpunkt S^* von g und E erhält man, indem man den allgemeinen Punkt $\mathrm{P}_t\,(5+3t\mid 6+4t\mid 2)$ in die Koordinatengleichung von $\mathrm{E}\colon\ x_2+2x_3=6$ einsetzt:

$$6+4t+2\cdot 2 = 6\ \Rightarrow\ t=-1$$

Setzt man $t=-1$ in P_t ein, ergibt sich: $\mathrm{S}^*\,(2\mid 2\mid 2)$.
Der Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes hat die Koordinaten $\mathrm{S}^*\,(2\mid 2\mid 2)$.

Um zu begründen, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt, kann man sich Folgendes überlegen:
Das untere Ende des Stabes, also der Punkt F, liegt auf der Platte, da er der Mittelpunkt der Eckpunkte A und B ist.
Der Punkt $\mathrm{S}^*\,(2\mid 2\mid 2)$ liegt auf der Platte, da die x_1-Koordinate von S^* zwischen den x_1-Koordinaten der Eckpunkte A und B liegt, die x_2-Koordinate von S^* zwischen den x_2-Koordinaten der Eckpunkte B und C liegt und die x_3-Koordinate von S^* zwischen den x_3-Koordinaten der Eckpunkte A und D bzw. B und C liegt.
Damit liegt der gesamte Schatten des Stabes von F zu S^* auf der Platte.

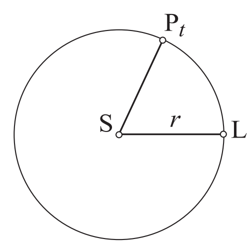
c) Da sich die Lichtquelle von L aus auf einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Kreisbahn bewegt, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist, liegt diese Kreisbahn in der Ebene $\mathrm{K}\colon x_3 = 2$. Die Kollisionspunkte der Kreisbahn mit der Platte liegen also auf der Schnittgeraden s von E und K.
Eine Gleichung von s erhält man durch Lösen des zugehörigen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{lrcrcl} \mathrm{I} & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ \mathrm{II} & & & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Setzt man $x_3 = 2$ in Gleichung I ein, ergibt sich: $x_2 + 2 \cdot 2 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$.
Wählt man $x_1 = t$, so erhält man:

$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte erhält man, indem man den Abstand eines allgemeinen Punktes $\mathrm{P}_t\,(t \mid 2 \mid 2)$ von s zum Mittelpunkt S des Kreises gleichsetzt mit dem Radius r der Kreisbahn.



Der Radius r der Kreisbahn ist der Abstand von S zu L:

$$r = \overline{\mathrm{SL}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{SL}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Der Abstand d_t eines allgemeinen Punktes P_t von s zum Mittelpunkt S des Kreises beträgt:

$$d_t = \overline{\mathrm{P}_t\mathrm{S}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_t\mathrm{S}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-t \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(5-t)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{(5-t)^2 + 16}$$

Die Gleichung $d_t = r$ löst man durch Quadrieren nach t auf:

$$\begin{aligned} \sqrt{(5-t)^2 + 16} &= 5 \\ (5-t)^2 + 16 &= 25 \\ 25 - 10t + t^2 + 16 &= 25 \\ t^2 - 10t + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe der *abc*- oder *pq*-Formel erhält man die Lösungen $t_1 = 2$ und $t_2 = 8$.
Setzt man $t_1 = 2$ und $t_2 = 8$ in P_t ein, erhält man die Kollisionspunkte $\mathrm{P}_1\,(2 \mid 2 \mid 2)$ und $\mathrm{P}_2\,(8 \mid 2 \mid 2)$.