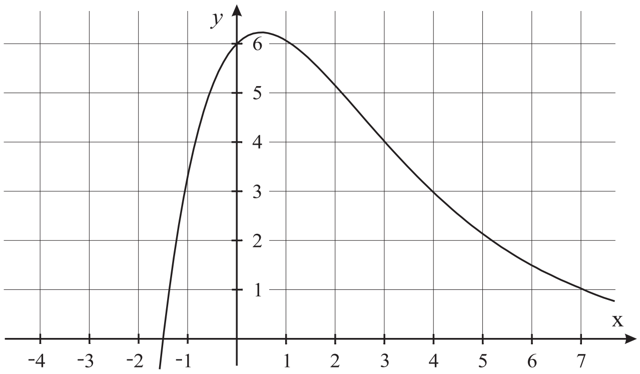
Notiz-Rand

4. Aufgabe

- Tangente
- Normale
- Flächeninhalt eines Dreiecks
- Stammfunktion und Integral

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = (4x+6)e^{-0,5x}$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Graph sei K_f:



a) Die Tangente an K_f im Punkt B $(0 \mid f(0))$ schneidet die x-Achse im Punkt F, die Normale in B schneidet die x-Achse im Punkt G.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BFG.

b) $F(x) = (-28-8x)e^{-0,5x}$ ist eine Stammfunktion von f.
Berechnen Sie damit den Flächeninhalt der Fläche, welche von K_f und den Koordinatenachsen im 2. Quadranten begrenzt wird.

Notiz-Rand

4. Aufgabe

a) Die Koordinaten des Punktes B erhalten Sie, indem Sie $x = 0$ in $f(x)$ einsetzen.
Zur Berechnung der Tangentensteigung m_t setzen Sie den x-Wert des Punktes B in die 1. Ableitung ein: $m_t = f'(x_{\mathrm{B}})$. Die Tangentengleichung erhalten Sie mithilfe der Formel $y = f'(x_{\mathrm{B}}) \cdot (x - x_{\mathrm{B}}) + f(x_{\mathrm{B}})$.
Die Normalensteigung m_n ist der negative Kehrwert von m_t, also $m_n = -\frac{1}{f'(x_{\mathrm{B}})}$. Die Normalengleichung erhalten Sie durch $y = \frac{-1}{f'(x_{\mathrm{B}})} \cdot (x - x_{\mathrm{B}}) + f(x_{\mathrm{B}})$. Die Punkte F und G ergeben sich durch Nullsetzen von y in der Tangenten- bzw. Normalengleichung. Überlegen Sie, welche Grundseite g und welche Höhe h das Dreieck BFG hat. Den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen Sie mit der Formel $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

b) Zur Berechnung der Fläche verwenden Sie ein Integral. Die linke Integrationsgrenze ist die Nullstelle von f. Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 0$ mithilfe des Satzes vom Nullprodukt. Verwenden Sie zur Berechnung den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{F}(x)\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Notiz-Rand

4. Aufgabe

a) Es ist $f(x) = (4x+6)e^{-0,5x}$; $x \in \mathbb{R}$.

Die Koordinaten des Punktes B erhält man, indem man $x = 0$ in $f(x)$ einsetzt:

$$f(0) = (4 \cdot 0 + 6)e^{-0,5 \cdot 0} = 6 \cdot e^0 = 6 \cdot 1 = 6 \Rightarrow \mathrm{B}\,(0\,|\,6)$$

Um die Tangentengleichung im Punkt B zu bestimmen, benötigt man zuerst die Steigung der Kurve m_t im Punkt B. Diese erhält man mithilfe der 1. Ableitung von f, die man mit der Produktregel bestimmt:

$$f'(x) = 4 \cdot e^{-0,5x} + (4x+6)e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = (-2x+1)e^{-0,5x}$$

Setzt man $x = 0$ in $f'(x)$ ein, ergibt sich:

$$m_t = f'(0) = (-2 \cdot 0 + 1)e^{-0,5 \cdot 0} = 1$$

Setzt man $\mathrm{B}\,(0\,|\,6)$ und $m_t = f'(0) = 1$ in die allgemeine Tangentengleichung $y = f'(x_{\mathrm{B}}) \cdot (x - x_{\mathrm{B}}) + f(x_{\mathrm{B}})$ ein, so erhält man:

$$t:\ y = 1 \cdot (x-0) + 6 \Rightarrow y = x + 6$$

Die Steigung der Normalen m_n ist der negative Kehrwert von m_t, also:

$$m_n = \frac{-1}{1} = -1$$

Setzt man $\mathrm{B}\,(0\,|\,6)$ und $m_n = \frac{-1}{f'(0)} = -1$ in die allgemeine Normalengleichung $y = \frac{-1}{f'(x_{\mathrm{B}})} \cdot (x - x_{\mathrm{B}}) + f(x_{\mathrm{B}})$ ein, so erhält man:

$$n:\ y = -1 \cdot (x-0) + 6 \Rightarrow y = -x + 6$$

Schneidet man t mit der x-Achse, so ist $y = 0$ bzw.

$$0 = x + 6 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow \mathrm{F}\,(-6\,|\,0)\,.$$

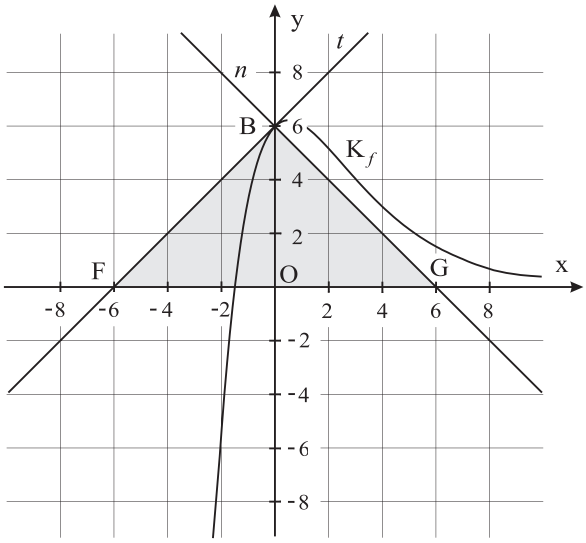
Schneidet man n mit der x-Achse, so ist $y = 0$ bzw.

$$0 = -x + 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \mathrm{G}\,(6\,|\,0)\,.$$

Das Dreieck BFG hat die Grundseite $g = \overline{\mathrm{FG}} = 12$ und die Höhe $h = \overline{\mathrm{OB}} = 6$. Somit ist der Flächeninhalt A_1 des Dreiecks BFG:

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36\ \mathrm{FE}$$

Notiz-Rand



b) Den Flächeninhalt A_2 der Fläche zwischen K_f und den Koordinatenachsen im 2. Quadranten berechnet man mithilfe eines Integrals, dabei wird die angegebene Stammfunktion $F(x)$ verwendet. Als linke Integrationsgrenze benötigt man noch die Nullstelle von f.
Die Gleichung $f(x) = 0$ führt zu $(4x+6)\,e^{-0,5x} = 0$. Da $e^{-0,5x} \neq 0$ ist, folgt daraus entsprechend $4x+6=0 \;\Rightarrow\; x=-1,5$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{-1,5}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1,5}^{0} (4x+6)e^{-0,5x}\mathrm{d}x \\
&= \Big[(-28-8x)e^{-0,5x}\Big]_{-1,5}^{0} \\
&= \left((-28-8\cdot 0)e^{-0,5\cdot 0}\right) - \left((-28-8\cdot(-1,5))e^{-0,5\cdot(-1,5)}\right) \\
&= (-28) - \left((-28+12)e^{0,75}\right) \\
&\approx 5,87
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt also etwa $5,87\,\mathrm{FE}$.