

14 Medikament



Aufgabe A 4.1

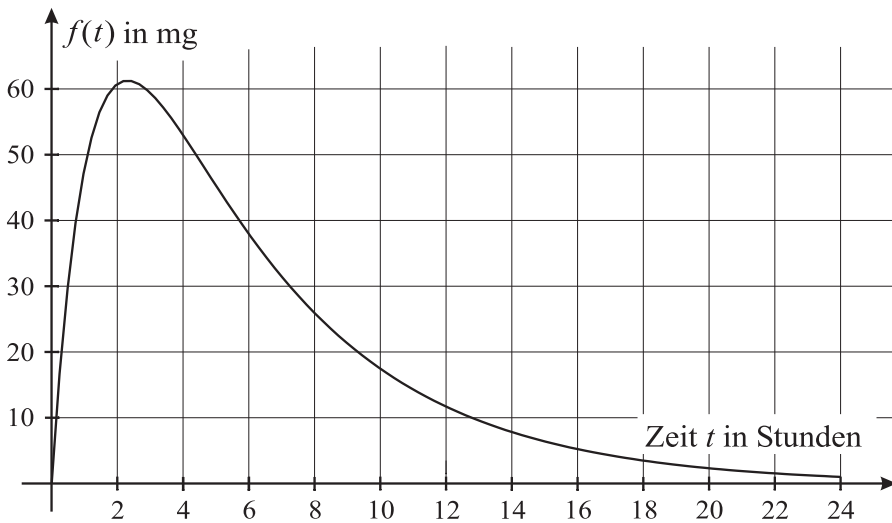
Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

- a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 130 \cdot (e^{-0,2t} - e^{-0,8t}) ; 0 \leq t \leq 24$$

(t in Stunden nach der Injektion, $f(t)$ in mg).

Der Graph von f ist durch folgende Abbildung gegeben:



Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 36 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind.

Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.

Berechnen Sie die Abnahme der Wirkstoffmenge im Blut nach 5 Stunden.

Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 12 Stunden.

Ab dem Zeitpunkt $t = 5$ wird die Wirkstoffmenge im Blut näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 5$ beschrieben.

Bestimmen Sie graphisch den Zeitpunkt, zu dem kein Wirkstoff mehr vorhanden ist.

Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0,05t}\right) ; t \geq 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, $g(t)$ in mg).

- b) Bestimmen Sie die langfristige Wirkstoffmenge des Medikaments im Blut.

Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1 \frac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt.

Interpretieren Sie die Gleichung $g(t + 15) = g(t) + 30$ im Sachzusammenhang.

- c) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert.

Die Wirkstoffmenge des Medikaments im Blut wird durch

$$h(t) = at \cdot e^{-bt} \text{ mit } a > 0 \text{ und } b > 0 \text{ beschrieben.}$$

Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in mg gemessen.

Bestimmen Sie die Konstanten a und b , wenn die Wirkstoffmenge vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert 10mg erreicht.

Aufgabe A 4.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x}$ und ein Punkt $B(u | f(u)) ; 0 < u < 1$ im 1. Feld.

Die Tangente t an B schneidet die x -Achse im Punkt A und die y -Achse im Punkt C .

- a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OAC unabhängig von u ist.

- b) Das Dreieck OAC rotiert um die y -Achse.

Bestimmen Sie exakt die Koordinaten des Punktes B so, dass das Volumen des Rotationskörpers 16 VE beträgt.

14 Medikament

Aufgabe A 4.1

- a) Bestimmen Sie mithilfe der gegebenen Abbildung die Schnittstellen des Graphen von f mit der Geraden $y = 36$ und berechnen Sie die Differenz der erhaltenen Zeitpunkte. Die Abnahme der Wirkstoffmenge im Blut nach 5 Stunden erhalten Sie mithilfe der 1. Ableitung von f , die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Setzen Sie $t = 5$ in $f'(t)$ ein. Die mittlere Wirkstoffmenge \bar{m} im Blut während der ersten 12 Stunden erhalten Sie mithilfe eines Integrals: $\bar{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t) dt$. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Zeichnen Sie die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 5$ ein und bestimmen Sie die die Schnittstelle der Tangente mit der t -Achse.
- b) Bestimmen Sie $g(t)$ für $t \rightarrow \infty$; beachten Sie, welcher Term gegen Null geht. Bestimmen Sie die 1. Ableitung von $g(t)$ mit der Kettenregel. Falls $g'(t) > 0$ gilt, ist g streng monoton wachsend. Den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1 \frac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt, erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $g'(t) = 1$ durch Logarithmieren nach t auflösen. Überlegen Sie, welche Bedeutung t , $t + 15$ und die entsprechenden Funktionswerte haben.
- c) Stellen Sie mithilfe von $h(t)$ und deren Ableitung sowie den gegebenen Daten zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf und lösen Sie diese; beachten Sie, dass das Maximum gegeben ist.

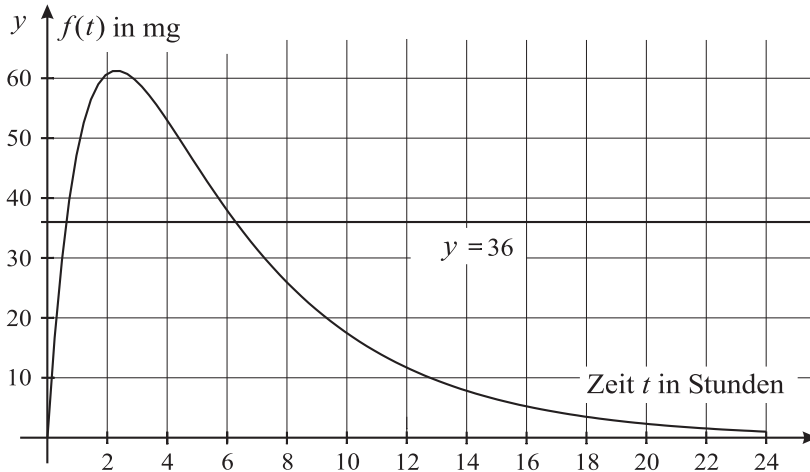
Aufgabe A 4.2

- a) Skizzieren Sie die Problemstellung. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B sowie die Steigung in B in Abhängigkeit von u ; verwenden Sie die Funktionsgleichung sowie die 1. Ableitung. Stellen Sie die Gleichung der Tangente t in B mithilfe der Formel $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ in Abhängigkeit von u auf. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts A der Tangente t mit der x -Achse durch Lösen der Gleichung $y = 0$ und die Koordinaten des Schnittpunkts C der Tangente t mit der y -Achse, indem Sie $x = 0$ in t einsetzen. Um zu zeigen, dass der Flächeninhalt A des Dreiecks OAC unabhängig von u ist, berechnen Sie diesen mithilfe der Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$. Als Grundlinie g verwenden Sie $g = \overline{OA}$, die zugehörige Höhe h ist $h = \overline{OC}$.
- b) Beachten Sie, dass ein Kegel entsteht, wenn das Dreieck OAC um die y -Achse rotiert. Das Volumen V eines Kegels erhalten Sie mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$. Bestimmen Sie den Radius und die Höhe des Kegels und damit das Volumen $V(u)$ des Kegels in Abhängigkeit von u . Lösen Sie die Gleichung $V(u) = 16$ nach u auf. Den y -Wert des Punktes B erhalten Sie, indem Sie den erhaltenen u -Wert in $f(x)$ einsetzen.

14 Medikament

Aufgabe A 4.1

a) Es ist $f(t) = 130 \cdot (e^{-0,2t} - e^{-0,8t})$; $0 \leq t \leq 24$.



Um den Zeitraum zu bestimmen, in dem das Medikament wirkt, bestimmt man mithilfe der gegebenen Abbildung die Schnittstellen des Graphen von f mit der Geraden $y = 36$. Man erhält: $t_1 \approx 0,6$ und $t_2 \approx 6,3$.

Wegen $t_2 - t_1 \approx 6,3 - 0,6 = 5,7$ wirkt das Medikament in einem Zeitraum von etwa 5,7 Stunden.

Die Abnahme der Wirkstoffmenge im Blut nach 5 Stunden erhält man mithilfe der 1. Ableitung von f , die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$f'(t) = 130 \cdot (e^{-0,2t} \cdot (-0,2) - e^{-0,8t} \cdot (-0,8)) = 130 \cdot (-0,2 \cdot e^{-0,2t} + 0,8 \cdot e^{-0,8t})$$

Setzt man $t = 5$ in $f'(t)$ ein, ergibt sich:

$$f'(5) = 130 \cdot (-0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot 5} + 0,8 \cdot e^{-0,8 \cdot 5}) \approx -7,66$$

Somit beträgt die Abnahme der Wirkstoffmenge im Blut nach 5 Stunden etwa 7,7 mg pro Stunde.

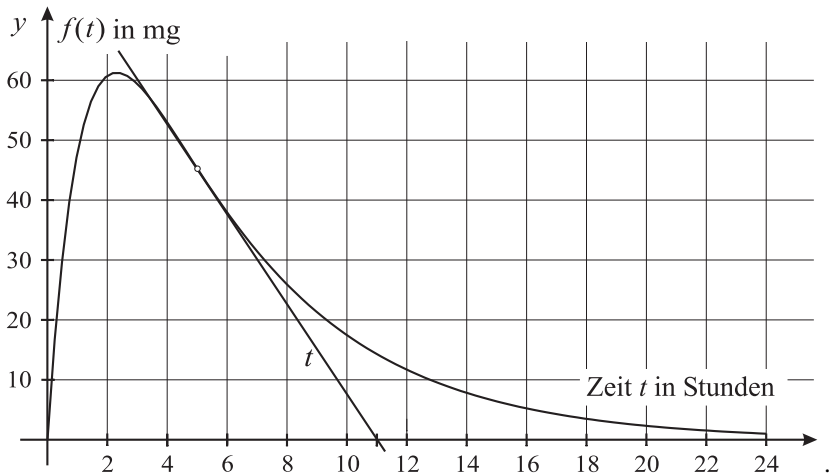
Die mittlere Wirkstoffmenge \bar{m} im Blut während der ersten 12 Stunden erhält man mithilfe

eines Integrals:

$$\begin{aligned}
 \bar{m} &= \frac{1}{12-0} \cdot \int_0^{12} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} 130 \cdot (e^{-0,2t} - e^{-0,8t}) dt \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \left[130 \cdot \left(\frac{e^{-0,2t}}{-0,2} - \frac{e^{-0,8t}}{-0,8} \right) \right]_0^{12} \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \left[130 \cdot \left(-5 \cdot e^{-0,2t} + \frac{5}{4} e^{-0,8t} \right) \right]_0^{12} \\
 &= \frac{1}{12} \cdot \left(130 \cdot \left(-5 \cdot e^{-0,2 \cdot 12} + \frac{5}{4} e^{-0,8 \cdot 12} \right) - \left(130 \cdot \left(-5 \cdot e^{-0,2 \cdot 0} + \frac{5}{4} e^{-0,8 \cdot 0} \right) \right) \right) \\
 &\approx 35,71
 \end{aligned}$$

Die mittlere Wirkstoffmenge im Blut beträgt während der ersten 12 Stunden etwa 35,7 mg.

Da ab dem Zeitpunkt $t = 5$ die Wirkstoffmenge im Blut näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 5$ beschrieben wird, kann man die Tangente mit der Steigung $m = f'(5) \approx -7,7$ in die gegebene Abbildung einzeichnen:



Der Zeitpunkt, zu dem kein Wirkstoff mehr vorhanden ist, ist die Schnittstelle der Tangente mit der t -Achse: $t \approx 11$.

Somit ist nach etwa 11 Stunden kein Wirkstoff mehr vorhanden.

b) Es ist $g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0,05t}) = 80 - 80 \cdot e^{-0,05t}$; $t \geq 0$.

Für $t \rightarrow \infty$ geht $e^{-0,05t}$ gegen Null, somit geht $g(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 80.

Die langfristige Wirkstoffmenge im Blut beträgt damit annähernd 80 mg.

Um zu zeigen, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt, bestimmt man die 1. Ableitung von $g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0,05 \cdot t}) = 80 - 80 \cdot e^{-0,05 \cdot t}$ mit der Kettenregel:

$$g'(t) = 0 - 80 \cdot e^{-0,05 \cdot t} \cdot (-0,05) = 4 \cdot e^{-0,05 \cdot t}$$

Wegen $e^{-0,05 \cdot t} > 0$ gilt: $g'(t) > 0$. Also ist g streng monoton wachsend.

Somit nimmt die Wirkstoffmenge ständig zu.

Den Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1 \frac{\text{mg}}{\text{min}}$ beträgt, erhält man, indem man die Gleichung $g'(t) = 1$ nach t auflöst:

$$\begin{aligned} 4 \cdot e^{-0,05 \cdot t} &= 1 \\ e^{-0,05 \cdot t} &= 0,25 \\ -0,05 \cdot t &= \ln(0,25) \\ t &= \frac{\ln(0,25)}{-0,05} \\ t &\approx 27,73 \end{aligned}$$

Somit beträgt etwa nach 28 Minuten die Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1 \frac{\text{mg}}{\text{min}}$.

In der gegebenen Gleichung beschreibt t einen bestimmten Zeitpunkt, $g(t)$ die Wirkstoffmenge zu diesem Zeitpunkt, $g(t + 15)$ die Wirkstoffmenge 15 Minuten später. Somit berechnet man mithilfe der Gleichung $g(t + 15) = g(t) + 30$ den Beginn (t) eines 15-minütigen Zeitraumes $[t; t + 15]$, in dem sich die Wirkstoffmenge um 30 mg vergrößert.

c) Es ist $h(t) = at \cdot e^{-bt}$; $a > 0$, $b > 0$.

Da der größte Wert der Wirkstoffmenge $h(t)$ angegeben ist, verwendet man die 1. Ableitung von $h(t)$. Diese erhält man mit der Produkt- und Kettenregel:

$$h'(t) = a \cdot e^{-bt} + at e^{-bt} \cdot (-b) = (a - abt) \cdot e^{-bt}$$

Da die Wirkstoffmenge $h(t)$ nach 4 Stunden ihren größten Wert 10mg annimmt, gelten folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad h(4) &= 10 \Rightarrow 4a \cdot e^{-4b} = 10 \\ \text{II} \quad h'(4) &= 0 \Rightarrow (a - 4ab) \cdot e^{-4b} = 0 \end{aligned}$$

Löst man Gleichung II, so ergibt sich wegen $a > 0$:

$$\begin{aligned} a - 4ab &= 0 \\ a \cdot (1 - 4b) &= 0 \\ 1 - 4b &= 0 \\ 1 &= 4b \\ b &= 0,25 \end{aligned}$$

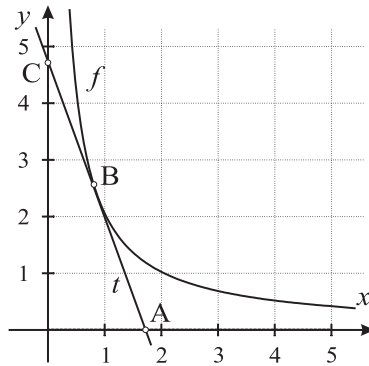
Setzt man $b = 0,25$ in Gleichung I ein, so ergibt sich:

$$4a \cdot e^{-4 \cdot 0,25} = 10 \Rightarrow a = 2,5e$$

Die Wirkstoffmenge erreicht 4 Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert 10mg, wenn die Konstanten $a = 2,5e$ und $b = 0,25$ für die neue Zusammensetzung gewählt werden.

Aufgabe A 4.2

- a) Es ist $f(x) = \frac{2}{x} = 2 \cdot x^{-1}$ mit $f'(x) = -2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$.
 Der Punkt $B(u \mid f(u))$ mit $0 < u < 1$ hat die Koordinaten $B(u \mid \frac{2}{u})$.



Die Tangente t in $B(u \mid f(u))$ hat die Steigung

$$m = f'(u) = -\frac{2}{u^2}$$

Setzt man B und m in die Tangentengleichung

$$y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

ein, erhält man:

$$\begin{aligned} t: y &= -\frac{2}{u^2} \cdot (x - u) + \frac{2}{u} \\ t: y &= -\frac{2}{u^2} \cdot x + \frac{4}{u} \end{aligned}$$

Den Schnittpunkt A der Tangente t mit der x -Achse erhält man durch $y = 0$.

Dies führt zu:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2}{u^2} \cdot x + \frac{4}{u} \\ x &= 2u \end{aligned}$$

Damit hat der Punkt A die Koordinaten $A(2u \mid 0)$.

Den Schnittpunkt C der Tangente t mit der y -Achse erhält man, indem man $x = 0$ in t einsetzt:

$$y = -\frac{2}{u^2} \cdot 0 + \frac{4}{u} = \frac{4}{u}$$

Damit hat der Punkt C die Koordinaten $C\left(0 \mid \frac{4}{u}\right)$.

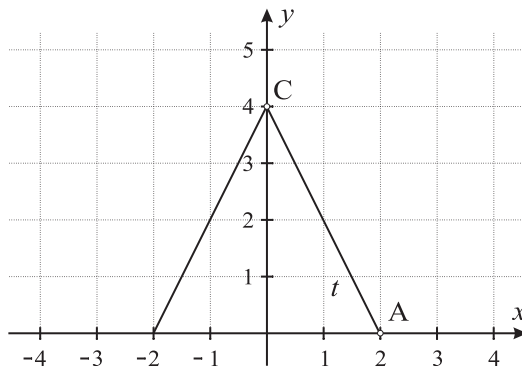
Um zu zeigen, dass der Flächeninhalt A des Dreiecks OAC unabhängig von u ist, berechnet man diesen mithilfe der Formel $A = \frac{g \cdot h}{2}$. Als Grundlinie g verwendet man $g = \overline{OA} = 2u$, die zugehörige Höhe h ist $h = \overline{OC} = \frac{4}{u}$.

Damit ergibt sich:

$$A = \frac{2u \cdot \frac{4}{u}}{2} = 4$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks OAC beträgt 4 FE, unabhängig von u .

b) Wenn das Dreieck OAC um die y -Achse rotiert, entsteht ein Kegel.



Das Volumen V eines Kegels erhält man mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Der Radius des Kegels beträgt $r = 2u$, die Höhe h des Kegels ist $h = \frac{4}{u}$.

Damit gilt für das Volumen des Kegels in Abhängigkeit von u :

$$V(u) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2u)^2 \cdot \frac{4}{u} = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot u$$

Da das Volumen des Rotationskörpers 16 VE beträgt, löst man die Gleichung $V(u) = 16$ nach u auf:

$$16 = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot u \Rightarrow u = \frac{3}{\pi}$$

Den y -Wert des Punktes B erhält man, indem man $u = \frac{3}{\pi}$ in $f(x)$ einsetzt:

$$f\left(\frac{3}{\pi}\right) = \frac{2}{\frac{3}{\pi}} = \frac{2}{3}\pi$$

Damit hat der Punkt B die Koordinaten $B\left(\frac{3}{\pi} \mid \frac{2}{3}\pi\right)$.