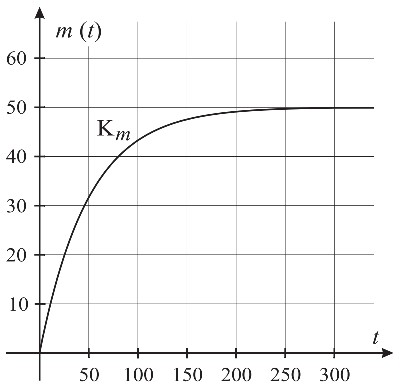
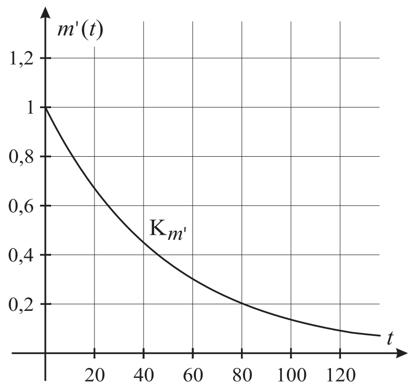
Notiz-Rand

3. Aufgabe

- Anwendungsbezogene Aufgabe
- Funktionsterm bestimmen
- Gleichungen lösen
- Integral berechnen und interpretieren

Dem menschlichen Körper können Medikamente durch einen Tropf kontinuierlich zugeführt werden. Zu Beginn weist der Körper keine Medikamentenmenge auf, nach in Gang setzen des Tropfes erhöht sich die Medikamentenmenge mit jedem Tropfen, aber zugleich beginnen Nieren und Leber, die Substanz wieder auszuscheiden.
Die Funktion mit der Funktionsgleichung $m(t)$ (t in Minuten, $m(t)$ in Milligramm (mg) gemessen) gebe die Medikamentenmenge im Körper zum Zeitpunkt t an. Für ein bestimmtes Medikament gelte $m'(t) = e^{-0{,}02t}$.
In den Abbildungen sind die Graphen von $m(t)$ und $m'(t)$ dargestellt:





a) Interpretieren Sie den Verlauf der Graphen von $m(t)$ und $m'(t)$ bezüglich der Medikamentenzufuhr.
Bestimmen Sie $m(t)$ unter der Voraussetzung, dass der Tropf zum Zeitpunkt $t = 0$ gestartet wird.
(Zwischenergebnis: $m(t) = -50e^{-0{,}02t} + 50$)

b) Berechnen Sie $\int_0^{10} e^{-0{,}02t}\,dt$. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Zahl im Sachzusammenhang.

c) Nach 5 Stunden wird der Tropf abgesetzt und die Medikamentenmenge wird durch die Funktion f mit $f(x) = 50 \cdot e^{-0{,}1155 \cdot x}$ (x in Stunden nach Absetzung des Tropfs , $f(x)$ in mg) beschrieben.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, von dem ab die Nachweisgrenze des Medikaments von $1\,\mu g$ $\left(= \frac{1}{1000}\,\text{mg}\right)$ im Körper unterschritten wird.

Notiz-Rand

3. Aufgabe

a) Überlegen Sie, wie die Graphen steigen bzw. fallen und welche Bedeutung die Asymptoten der beiden Graphen haben.
Bestimmen Sie eine allgemeine Stammfunktion und verwenden Sie die Bedingung, dass der Körper zu Beginn $(t = 0)$ keine Medikamentenmenge aufweist.

b) Berechnen Sie das Integral mithilfe einer geeigneten Stammfunktion, die Sie durch lineare Integration erhalten. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Interpretieren Sie das Integral als Summe.

c) Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen diese durch Logarithmieren. Beachten Sie die Einheit von x.

Notiz-Rand

3. Aufgabe

a) Anhand des Graphen von $m(t)$ kann man erkennen, dass die Medikamentenmenge im Körper zunächst schnell, mit wachsender Zeit aber immer langsamer zunimmt; die Medikamentenmenge ist für $t > 250$ nahezu konstant und beträgt dann nahezu 50 mg.
Anhand des Graphen von $m'(t)$ kann man erkennen, dass die Änderungsrate bzw. Zunahme der Medikamentenmenge im Körper mit wachsendem t immer kleiner wird und schließlich gegen Null geht.
Um $m(t)$ zu bestimmen, bildet man eine allgemeine Stammfunktion von $m'(t) = e^{-0,02t}$.
Als Ansatz verwendet man:

$$m(t) = \frac{1}{-0,02}e^{-0,02t} + c = -50e^{-0,02t} + c$$

Da der Körper für $t = 0$ keine Medikamentenmenge aufweist, gilt:

$$\begin{aligned} m(0) &= 0 \\ -50e^{-0,02\cdot 0} + c &= 0 \\ -50 + c &= 0 \\ c &= 50 \end{aligned}$$

Somit erhält man:

$$m(t) = -50e^{-0,02t} + 50$$

b) Zur Berechnung des Integrals verwendet man eine geeignete Stammfunktion und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} e^{-0,02t}\,\mathrm{d}t &= \left[-50e^{-0,02t}\right]_0^{10} \\ &= \left(-50e^{-0,02\cdot 10}\right) - \left(-50e^{-0,02\cdot 0}\right) \\ &\approx 9,06 \end{aligned}$$

Da dieses Integral die Summe aller Zuwachsraten von $t = 0$ bis $t = 10$ beschreibt, entspricht das Ergebnis die Medikamentenmenge, die nach 10 Minuten im Körper vorhanden ist. Sie beträgt etwa 9 mg.

c) Es ist $f(x) = 50 \cdot e^{-0,1155\cdot x}$ für $x > 5$.
Um den Zeitpunkt x zu bestimmen, ab dem die Nachweisgrenze von $\frac{1}{1000}$ mg unterschritten wird, löst man die Gleichung $f(x) = \frac{1}{1000}$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 50 \cdot e^{-0,1155\cdot x} &= \frac{1}{1000} \\ e^{-0,1155\cdot x} &= \frac{1}{50000} \\ -0,1155 \cdot x &= \ln\left(\frac{1}{50000}\right) \\ x &= \frac{\ln\left(\frac{1}{50000}\right)}{-0,1155} \\ x &\approx 93,68 \end{aligned}$$

Nach etwa weiteren 94 Stunden, also insgesamt etwa 99 Stunden (ca. 4 Tage) nach erstmaliger Einnahme des Medikaments, wird die Nachweisgrenze unterschritten.