Notiz-Rand

13. Aufgabe

- Graph skizzieren
- Geradengleichung aufstellen
- Normale
- Integration

Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2$.

a) Erläutern Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen der Funktion $h(x) = \sin(x)$ entsteht. Skizzieren Sie das Schaubild von g für $0 \leqslant x \leqslant 8$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch den Ursprung, die parallel ist zur Normalen an das Schaubild von g im Punkt $P(4 \mid 2)$.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche der Graph von g mit der Geraden $y = 2$ im Intervall $[4; 8]$ einschließt.

Notiz-Rand

13. Aufgabe

a) Überlegen Sie, wie das Schaubild von h in y-Richtung gestreckt und verschoben wurde und bestimmen Sie die Periode p von g durch $p = \frac{2\pi}{b}$.

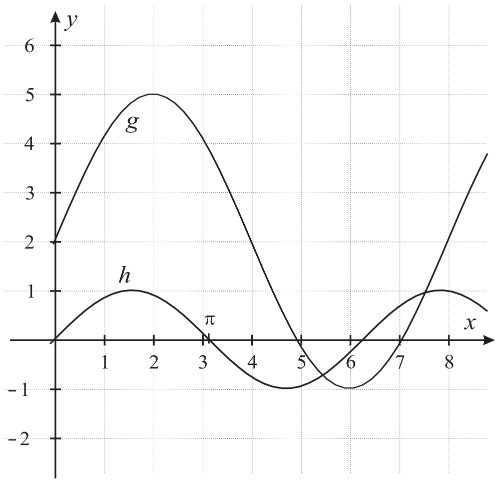
b) Die Steigung der Tangente bzw. der Normalen an das Schaubild von g im Punkt P erhalten Sie mithilfe der 1. Ableitung von g, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Die Tangentensteigung m_t erhalten Sie, indem Sie den x-Wert von P in $g'(x)$ einsetzen. Die Steigung m_n der Normalen in P ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung, also $m_n = -\frac{1}{m_t}$. Da die gesuchte Gerade durch den Ursprung parallel zur Normalen in P ist, verwenden Sie die gleiche Steigung wie die Normalensteigung in P.

c) Den Flächeninhalt A der Fläche, welche der Graph von g mit der Geraden $y = 2$ im Intervall $[4\,;8]$ einschließt, erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Beachten Sie, dass die Gerade oberhalb des Graphen von g verläuft und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Notiz-Rand

13. Aufgabe

a) Es ist $g(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2$.
Man erhält das Schaubild von g aus dem Schaubild der Funktion $h(x) = \sin(x)$ folgendermaßen:
Das Schaubild von h wurde in y-Richtung mit Faktor 3 gestreckt, in y-Richtung um 2 LE nach oben verschoben und in x-Richtung mit Faktor $\frac{4}{\pi}$ gestreckt, d.h. für die Periode p von g gilt: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.
Damit kann man das Schaubild von g für $0 \leqslant x \leqslant 8$ skizzieren:



b) Die Steigung der Tangente bzw. der Normalen an das Schaubild von g im Punkt P(4 | 2) erhält man mithilfe der 1. Ableitung von g, die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$g'(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Die Steigung m_t der Tangente in P erhält man, indem man $x = 4$ in $g'(x)$ einsetzt:

$$m_t = g'(4) = \frac{3}{4}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) = \frac{3}{4}\pi \cdot \cos(\pi) = \frac{3}{4}\pi \cdot (-1) = -\frac{3}{4}\pi$$

Die Steigung m_n der Normalen in P ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung:

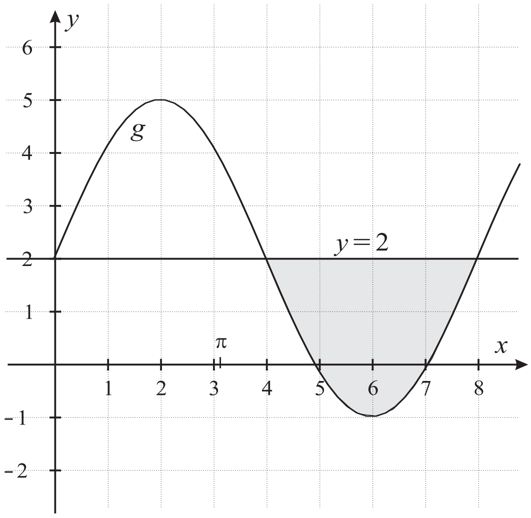
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{3\pi}$$

Da die gesuchte Gerade durch den Ursprung parallel zur Normalen in P verläuft, hat sie die gleiche Steigung wie die Normale in P.
Somit hat die Gerade die Gleichung:

$$y = \frac{4}{3\pi} \cdot x$$

Notiz-Rand

c) Den Flächeninhalt A der Fläche, welche der Graph von g mit der Geraden $y = 2$ im Intervall $[4; 8]$ einschließt, erhält man mithilfe eines Integrals:



Die Integrationsgrenzen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$. Da die Gerade $y = 2$ oberhalb des Graphen von g verläuft, gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_4^8 (2 - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_4^8 \left(2 - \left(3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_4^8 \left(-3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\frac{\pi}{4}}\right]_4^8 \\
&= \left[\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_4^8 \\
&= \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 8\right)\right) - \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right)\right) \\
&= \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos(2\pi)\right) - \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos(\pi)\right) \\
&= \frac{12}{\pi} - \left(-\frac{12}{\pi}\right) \\
&= \frac{24}{\pi}
\end{aligned}
$$

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{24}{\pi}$ FE.