

22. Aufgabe

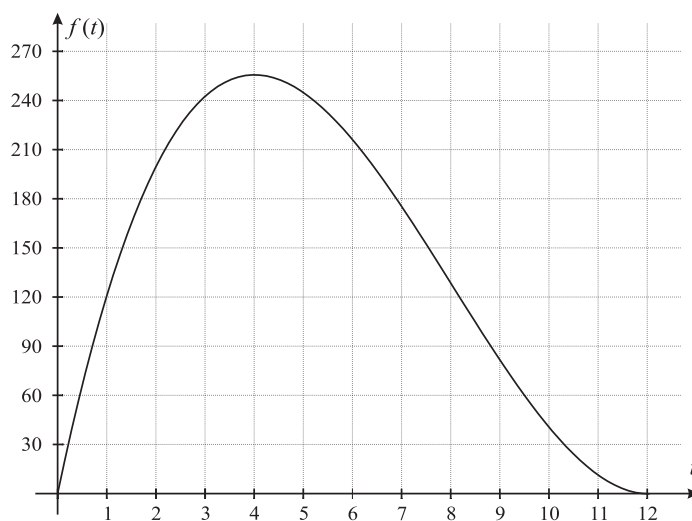
- Anwendungsbezogene Aufgabe
- Gleichung grafisch lösen
- Integration
- Fläche interpretieren

Die Zuflussgeschwindigkeit des Wassers in einem Stausee einer Bergregion lässt sich in den ersten 12 Stunden nach sehr starken Regenfällen näherungsweise durch die Funktion f mit

$$f(t) = t^3 - 24t^2 + 144t$$

beschreiben (t : Zeit in Stunden h, $f(t)$: Zuflussgeschwindigkeit in m^3/h).

Die folgende Abbildung zeigt den Graph von f :



- a) Begründen Sie mithilfe des Graphen und geeigneter Funktionswerte, dass der Zeitraum, in dem die Zuflussgeschwindigkeit mindestens $120 \text{ m}^3/\text{h}$ beträgt, länger als 7 Stunden ist.
- b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der t -Achse zwischen $t = 0$ und $t = 12$ einschließt.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- c) Erläutern Sie, wie man das zwei Stunden umfassende Zeitintervall, in dem die größte Wassermenge zufließt, bestimmen kann. Ermitteln Sie dazu einen rechnerischen Ansatz, mit dem das gesuchte Intervall bestimmt werden kann. Beschreiben Sie (kurz) den Lösungsweg. Eine Durchführung der Rechnungen ist nicht erforderlich.

22. Aufgabe

- a) Schätzen Sie anhand der Zeichung, für welche t -Werte der Funktionswert über 120 liegt und rechnen Sie die zugehörigen exakten Funktionswerte durch Einsetzen der t -Werte in $f(t)$ aus.
- b) Berechnen Sie das Integral von $f(t)$ in den angegebenen Integrationsgrenzen. Zur Interpretation des errechneten Wertes beachten Sie, dass f die Zuflussgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt und dass man das Integral als Summe von Größen auffassen kann.
- c) Zur Berechnung des zwei Stunden umfassenden Zeitintervalls, in dem die größte Wassermenge zufließt, führen Sie eine Variable a für die untere Integrationsgrenze ein und geben die obere Integrationsgrenze auch in Abhängigkeit von dieser Variablen an. Beschreiben Sie, was Sie nun bei der Integration von $f(t)$ in diesen Integrationsgrenzen erhalten und wie Sie aus diesem Term a so berechnen können, dass das optimale Intervall bestimmt wird.

22. Aufgabe

- a) Anhand des Graphen von f kann man abschätzen, dass für $1 \leq t \leq 8,1$ gilt: $f(t) \geq 120$.
Wegen $f(1) = 121$ und $f(8,1) \approx 123,2$ und aufgrund des Verlaufs des Graphen von f gilt für den Zeitraum $1 \leq t \leq 8,1$: $f(t) > 120$.
Also ist der Zeitraum, in dem die Zuflussgeschwindigkeit über $120 \text{ m}^3/\text{h}$ beträgt, größer als 7 Stunden.
- b) Da der Graph für $0 \leq t \leq 12$ oberhalb und auf der t -Achse verläuft, berechnet man den gesuchten Flächeninhalt A durch Integration der Funktion $f(t)$ mit den Integrationsgrenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = 12$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{12} f(t) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - 8t^3 + 72t^2 \right]_0^{12} \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 12^4 - 8 \cdot 12^3 + 72 \cdot 12^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 8 \cdot 0^3 + 72 \cdot 0^2 \right) \\ &= 1728 \end{aligned}$$

Durch das obige Integral berechnet man die Menge an zugeflossenem Wasser in den ersten 12 Stunden; es sind also 1728 m^3 Wasser zugeflossen.

- c) Um das zwei Stunden umfassende Zeitintervall I , in dem die größte Wassermenge zufließt, zu bestimmen, verwendet man für das gesuchte Intervall I den Ansatz $I = [a; a+2]$ mit $0 \leq a \leq 10$.
Die zugeflossene Wassermenge $W(a)$ wird mithilfe des folgenden Integrals berechnet:

$$W(a) = \int_a^{a+2} f(t) dt$$

Man erhält als Ergebnis ein Polynom $W(a)$ in Abhängigkeit von a .

Das absolute Maximum der Wassermenge, also von $W(a)$, bestimmt man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $W(a)$.

Man bestimmt die Lösungen der Gleichung $W'(a) = 0$ und setzt diese in $W''(a)$ ein; wenn $W''(a) < 0$, liegt ein Maximum vor. Mithilfe des so berechneten a -Werts erhält man das zugehörige Zeitintervall I .

Auf eine Untersuchung der Randwerte kann verzichtet werden, da man an der Zeichnung erkennt (man betrachte hierzu die Fläche zwischen Graph und t -Achse), dass die maximale Wassermenge weder zwischen der 0. und 2. Stunde noch zwischen der 10. und 12. Stunde zufließt.