Biathlon

☐

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine $2,5\,\text{km}$ lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine $200\,\text{m}$ lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit $88\,\%$ und liegend mit $93\,\%$ Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
   A: Der Athlet trifft stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal.
   B: Der Athlet trifft liegend bei fünf Schüssen mindestens drei Mal.
   C: Der Athlet trifft stehend bei fünf Schüssen genau drei Mal und zwar unmittelbar hintereinander.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss.

c) Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern und künftig mit über 85% Wahrscheinlichkeit zumindest die ersten vier Mal hintereinander treffen. Bestimmen Sie rechnerisch die Trefferwahrscheinlichkeit, die er mindestens erreichen muss, damit ihm dies gelingt.

d) Bestimmen Sie, wie oft der Athlet im Training liegend schießen müsste, damit er mit mehr als $95\,\%$ Wahrscheinlichkeit mindestens 2 Fehlschüsse hat.

Biathlon

a) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Stehendschießen mit den Parametern n und p_1 fest.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft, erhalten Sie mithilfe der Binomialverteilung.
Legen Sie Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Liegendschießen mit den Parametern n und p_2 fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, dass der Athlet liegend bei fünf Schüssen mindestens drei Mal trifft, erhalten Sie mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung.
Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C, dass der Athlet stehend genau drei Mal trifft, und zwar unmittelbar hintereinander bezeichnen Sie mit t: Treffer und mit $\bar{t}$: Fehlschuss und verwenden die Pfadregeln.

b) Überlegen Sie, aus welchen drei Ereignissen A, B und C sich das Ereignis E: «Der Athlet muss im gesamten Wettbewerb höchstens eine Strafrunde laufen» zusammensetzt.
Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Stehendschießen mit den Parametern n und p_1 fest.
Legen Sie Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Liegendschießen mit den Parametern n und p_2 fest.
Bestimmen Sie mithilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C. Beachten Sie, dass das Stehendschießen unabhängig vom Liegendschießen ist:
$P(A) = P(X = 5) \cdot P(Y = 5)$, $P(B) = P(X = 4) \cdot P(Y = 5)$ und $P(C) = P(X = 5) \cdot P(Y = 4)$.
Addieren Sie die Ergebnisse.

c) Legen Sie p als Trefferwahrscheinlichkeit beim Stehendschießen fest und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlschuss. Bezeichnen Sie mit t: Treffer und mit $\bar{\mathrm{t}}$: Fehlschuss. Die Wahrscheinlichkeit, zumindest die ersten vier Mal hintereinander zu treffen, erhalten Sie mithilfe der Pfadregeln. Stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen Sie diese durch Wurzelziehen.

d) Legen Sie Z als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Fehlschüsse beim Liegendschießen mit den Parametern p und unbekanntem n fest. Lösen Sie die Ungleichung $P(Z \geqslant 2) > 95\%$ mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses durch Ausprobieren.

Biathlon

a) Wenn der Biathlet stehend schießt, handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, da es nur die Ausgänge «Treffer» oder «nicht Treffer» gibt. Die Trefferwahrscheinlichkeit beim Stehendschießen beträgt bei jedem Schuss $p_1 = 88\% = 0{,}88$. Da fünf Mal geschossen wird, ist die Länge der Bernoullikette $n = 5$. Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Stehendschießen fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p_1 = 0{,}88$.
   Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft, erhält man mithilfe der Binomialverteilung:

$$P(A) = P(X = 4) \approx 0{,}360 = 36{,}0\%$$

frv.tv/ck

   Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt etwa 36 %.
   Legt man Y als Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Liegendschießen fest, so ist Y binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p_2 = 0{,}93$.
   Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, dass der Athlet liegend bei fünf Schüssen mindestens drei Mal trifft, erhält man mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(B) = P(Y \geqslant 3) = 1 - P(Y \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}003 = 0{,}997 = 99{,}7\%$$

frv.tv/ck

   Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt etwa $99{,}7\,\%$.
   Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C, dass der Athlet stehend genau drei Mal trifft, und zwar unmittelbar hintereinander, kann man sich Folgendes überlegen: Bezeichnet man mit t: Treffer und mit $\bar{t}$: Fehlschuss, so ergibt sich mithilfe der Pfadregeln:

$$\begin{aligned} P(C) &= P\left(t,t,t,\bar{t},\bar{t}\right) + P\left(\bar{t},t,t,t,\bar{t}\right) + P\left(\bar{t},\bar{t},t,t,t\right) \\ &= 0{,}88^3 \cdot 0{,}12^2 + 0{,}12 \cdot 0{,}88^3 \cdot 0{,}12 + 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^3 \\ &= 3 \cdot 0{,}88^3 \cdot 0{,}12^2 \\ &\approx 0{,}029 = 2{,}9\% \end{aligned}$$

   Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C beträgt etwa $2{,}9\,\%$.

b) Wenn der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens eine Strafrunde laufen muss, so setzt sich dieses Ereignis E aus drei Ereignissen zusammen:
   A: Er trifft beim Stehendschießen fünf Mal und beim Liegendschießen fünf Mal.
   B: Er trifft beim Stehendschießen genau vier Mal und beim Liegendschießen fünf Mal.
   C: Er trifft beim Stehendschießen fünf Mal und beim Liegendschießen genau vier Mal.
   Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Stehendschießen fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p_1 = 0{,}88$.
   Legt man Y als Zufallsvariable für die Anzahl der Treffer beim Liegendschießen fest, so ist Y binomialverteilt mit den Parametern $n = 5$ und $p_2 = 0{,}93$.

Da das Stehendschießen unabhängig vom Liegendschießen ist, erhält man mithilfe der Binomialverteilung:

frv.tv/ci

$$P(A) = P(X = 5) \cdot P(Y = 5) \approx 0,5277 \cdot 0,6957 \approx 0,3671$$
$$P(B) = P(X = 4) \cdot P(Y = 5) \approx 0,3598 \cdot 0,6957 \approx 0,2503$$
$$P(C) = P(X = 5) \cdot P(Y = 4) \approx 0,5277 \cdot 0,2618 \approx 0,1382$$

Somit ergibt sich:

$$P(E) = P(A) + P(B) + P(C) \approx 0,3671 + 0,2503 + 0,1382 = 0,7556$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss, beträgt etwa $75,6\%$.

c) Legt man p als Trefferwahrscheinlichkeit beim Stehendschießen fest, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Fehlschuss $1 - p$. Man bezeichnet mit t: Treffer und mit $\overline{t}$: Fehlschuss. Die Wahrscheinlichkeit, zumindest die ersten vier Mal hintereinander zu treffen, erhält man mithilfe der Pfadregeln. Da diese künftig über 85% betragen soll, muss gelten:

$$\begin{aligned} P\left(tttt\overline{t}\right) + P\left(ttttt\right) &> 0,85 \\ p^4 \cdot (1-p) + p^5 &> 0,85 \\ p^4 - p^5 + p^5 &> 0,85 \\ p^4 &> 0,85 \\ p &> \sqrt[4]{0,85} \\ p &> 0,96 \end{aligned}$$

Somit muss seine Trefferwahrscheinlichkeit beim Stehendschießen mind. 96% betragen.

d) Legt man Z als Zufallsvariable für die Anzahl der Fehlschüsse beim Liegendschießen fest, so ist Z binomialverteilt mit den Parametern $p = 1 - 0,93 = 0,07$ und unbekanntem n. Um zu bestimmen, wie oft der Athlet im Training liegend schießen müsste, damit er mit mehr als 95 % Wahrscheinlichkeit mindestens 2 Fehlschüsse hat, löst man folgende Ungleichung mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned} P(Z \geqslant 2) &> 0,95\% \\ 1 - P(Z \leqslant 1) &> 0,95 \\ 0,05 &> P(Z \leqslant 1) \end{aligned}$$

Durch Ausprobieren ergibt sich:

frv.tv/cm

$$n = 65 : P(Z \leqslant 1) \approx 0,0527$$
$$n = 66 : P(Z \leqslant 1) \approx 0,0496$$

Somit muss er mindestens 66 Mal liegend schießen.