

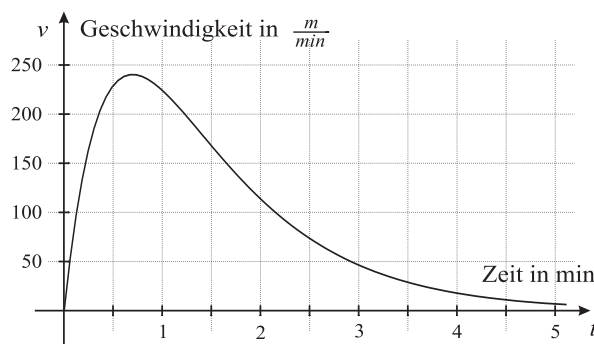
2. Aufgabe

- Bewegungsaufgabe
- Funktionswerte berechnen
- Integral berechnen
- Tangente berechnen

Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird beschrieben durch

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}; t \geq 0$$

(Zeit t in min, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von v :



- a) Prüfen Sie, ob die Geschwindigkeit des Motorbootes nach einer Minute größer als $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ist.
- b) Berechnen Sie, wie weit das Motorboot nach zwei Minuten gefahren ist.
- c) Ab dem Zeitpunkt $t_0 = 2,55$ wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an das Schaubild der Funktion v an der Stelle t_0 beschrieben. Bestimmen Sie rechnerisch, wann das Motorboot zum Stillstand kommt.

2. Aufgabe

- a) Setzen Sie $t = 1$ in $v(t)$ ein. Beachten Sie, dass das Ergebnis die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{min}}$ hat und rechnen Sie das erhaltene Ergebnis in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ um.
- b) Die Strecke s , die das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, erhalten Sie mithilfe eines Integrals: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.
- c) Zur Bestimmung der Gleichung der Tangente benötigen Sie den Funktionswert zum Zeitpunkt t_0 , also $v(t_0)$, sowie die zugehörige Steigung m , welche Sie mithilfe der 1. Ableitung von v bestimmen.
Setzen Sie diese in die allgemeine Tangentengleichung $y = v'(t_0) \cdot (t - t_0) + v(t_0)$ ein.
Das Motorboot kommt zum Stillstand, wenn die neue Geschwindigkeit, die durch die Tangentengleichung beschrieben wird, Null ist. Setzen Sie also $y = 0$ und lösen Sie die Gleichung nach t auf.

Notiz-Rand

2. Aufgabe

Es ist $v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}$; $t \geq 0$ (Zeit t in min, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$).

- a) Die Geschwindigkeit des Motorbootes nach einer Minute erhält man, indem man $t = 1$ in $v(t)$ einsetzt:

$$v(1) = 960 \cdot e^{-1} - 960 \cdot e^{-2 \cdot 1} \approx 223$$

Die Geschwindigkeit des Motorboots nach einer Minute beträgt etwa $223 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

Um die Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ anzugeben, erweitert man den Bruch mit 60:

$$v(1) = 223 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 223 \cdot \frac{60 \text{ m}}{60 \text{ min}} = \frac{13380 \text{ m}}{\text{h}} = 13,38 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Somit ist die Geschwindigkeit des Motorboots nach einer Minute kleiner als $15 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- b) Die Strecke s , die das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 v(t) dt \\ &= \int_0^2 (960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}) dt \\ &= \left[\frac{960}{-1} \cdot e^{-t} - \frac{960}{-2} \cdot e^{-2t} \right]_0^2 \\ &= (-960 \cdot e^{-2} + 480 \cdot e^{-2 \cdot 2}) - (-960 \cdot e^{-0} + 480 \cdot e^{-2 \cdot 0}) \\ &\approx 358,9 \end{aligned}$$

Das Motorboot ist in den ersten zwei Minuten etwa 359 m weit gefahren.

- c) Zur Bestimmung der Gleichung der Tangente benötigt man den Funktionswert zum Zeitpunkt $t_0 = 2,55$, also $v(2,55) \approx 69,11$, sowie die zugehörige Steigung, die man mit der 1. Ableitung von v ermitteln kann. Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$v'(t) = 960 \cdot e^{-t} \cdot (-1) - 960 \cdot e^{-2t} \cdot (-2) = -960 \cdot e^{-t} + 1920 \cdot e^{-2t}$$

Setzt man $t_0 = 2,55$ in $v'(t)$ ein, erhält man:

$$m = v'(2,55) = -960 \cdot e^{-2,55} + 1920 \cdot e^{-2 \cdot 2,55} \approx -63,25$$

Setzt man die berechneten Werte in die allgemeine Tangentengleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= v'(t_0) \cdot (t - t_0) + v(t_0) \\ y &= -63,25 \cdot (t - 2,55) + 69,11 \\ y &= -63,25t + 230,40 \end{aligned}$$

Das Motorboot kommt zum Stillstand, wenn die neue Geschwindigkeit, die durch die Tangentengleichung beschrieben wird, Null ist:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -63,25t + 230,40 &= 0 \\ t &\approx 3,64 \end{aligned}$$

Nach etwa 3,6 Minuten kommt das Motorboot zum Stillstand.