Geradenschar

☐

Gegeben sind die Ebene $E\colon\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ;\ a, t \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene E.
Bestimmen Sie den Wert von a, für den g_a parallel zu E ist
Geben Sie die Gleichung derjenigen Geraden der Schar an, die orthogonal zu g_4 ist.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.
Erläutern Sie, was mithilfe der Gleichung $\sin 10^\circ = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$ berechnet werden kann.

c) Begründen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene $F\colon\ x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt $P(5 \mid 1 \mid 1)$ geht und in F liegt,
aber nicht zur Schar gehört.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

Geradenschar

a) Setzen Sie $a = 4$ in die Gleichung der Geradenschar ein, um die Gleichung von g_4 zu erhalten.
Den Schnittpunkt S der Geraden g_4 mit der Ebene E erhalten Sie, indem Sie den allgemeinen Punkt P_t von g_4 in die Ebenengleichung einsetzen und die Gleichung nach t auflösen. Setzen Sie den erhaltenen t-Wert in P_t ein.
Beachten Sie, dass die Gerade g_a parallel zu E ist, wenn der Richtungsvektor von g_a orthogonal zum Normalenvektor von E ist, d.h. wenn das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ergibt. Lösen Sie die entsprechende Gleichung nach a auf.
Beachten Sie, dass eine Gerade g_a der Schar orthogonal zu g_4 ist, wenn der Richtungsvektor $\vec{u}_a$ der Geradenschar orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u}_4$ von g_4 ist, d.h. wenn das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ergibt. Lösen Sie die entsprechende Gleichung nach a auf.

b) Den Schnittwinkel α von g_4 und E erhalten Sie mit der Formel $\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_4 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_4| \cdot |\vec{n}|}$, wobei $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E und $\vec{u}_4$ der Richtungsvektor von g_4 ist.
Erstellen Sie eine Gleichung für den Winkel zwischen g_a und E (entsprechend der vorherigen Aufgabe) und setzen Sie $\alpha = 10°$ ein.

c) Um zu begründen, dass alle Geraden g_a in der Ebene $F: x_3 = 1$ liegen, setzen Sie den allgemeinen Punkt P_t von g_a in F ein; bei einer wahren Aussage liegen alle Geraden g_a in der Ebene F. Alternativ können Sie prüfen, ob der Stützpunkt P von g_a in F liegt und ob der Richtungsvektor $\vec{u}_a$ von g_a orthogonal zum Normalenvektor $\vec{n}_F$ von F ist, d.h. ob das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt.
Verwenden Sie für den Richtungsvektor der Geraden h den Ansatz $\vec{u}_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Beachten Sie, dass $\vec{u}_h$ folgende beiden Bedingungen erfüllen muss:
$\vec{u}_h$ muss orthogonal zum Normalenvektor $\vec{n}_F$ von F sein, d.h. das Skalarprodukt der beiden Vektoren muss Null ergeben. Außerdem darf $\vec{u}_h$ kein Vielfaches von $\vec{u}_a$ sein. Bestimmen Sie damit die Komponenten y und z und wählen Sie x.

Geradenschar

Gegeben sind $\mathrm{E}:\ 3x_1+6x_2+4x_3=16$ und $g_a:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$; $a,t\in\mathbb{R}$.

a) Den Schnittpunkt der Geraden $g_4:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ mit der Ebene E erhält man, indem man den allgemeinen Punkt $\mathrm{P}_t\left(5+4t \mid 1+t \mid 1\right)$ von g_4 in die Ebenengleichung einsetzt:

$$3\cdot(5+4t)+6\cdot(1+t)+4\cdot 1=16\ \Rightarrow\ t=-\frac{1}{2}$$

Setzt man $t=-\frac{1}{2}$ in P_t ein, erhält man den Schnittpunkt $\mathrm{S}\left(3 \mid \frac{1}{2} \mid 1\right)$.

Die Gerade g_a ist parallel zu E, wenn der Richtungsvektor $\vec{u}_a$ von g_a orthogonal zum Normalenvektor von E ist, d.h. wenn das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ergibt:

$$\begin{aligned}\vec{u}_a\cdot\vec{n}&=0\\ \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}&=0\\ a\cdot 3+1\cdot 6+0\cdot 4&=0\\ a&=-2\end{aligned}$$

Somit ist für $a=-2$ die Gerade g_{-2} parallel zu E.

Eine Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4, wenn der Richtungsvektor $\vec{u}_a=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}$ der Geradenschar orthogonal zum Richtungsvektor $\vec{u}_4=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ von g_4 ist, d.h. wenn das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ergibt:

$$\begin{aligned}\vec{u}_a\cdot\vec{u}_4&=0\\ \begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}&=0\\ a\cdot 4+1\cdot 1+0\cdot 0&=0\\ a&=-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Somit ist die Gerade $g_{-\frac{1}{4}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geradenschar orthogonal zu g_4.

b) Den Schnittwinkel α von g_4 und E erhält man mit der Formel $\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_4 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_4| \cdot |\vec{n}|}$, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E und $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor von g_4 ist.
Damit erhält man:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_4 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_4| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|4 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 5|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 33{,}98^\circ$$

Der Winkel α zwischen g_4 und E beträgt etwa 34°.
Man könnte vermuten, dass mithilfe der Gleichung $\sin 10^\circ = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$ diejenigen Werte von a berechnet werden, für die der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $\alpha = 10^\circ$ hat. Um dies zu bestätigen, erstellt man eine Gleichung für den Winkel zwischen g_a und E (entsprechend der vorherigen Aufgabe):

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}_a \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_a| \cdot |\vec{n}|}$$

$$\sin 10^\circ = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$\sin 10^\circ = \frac{|a \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 5|}{\sqrt{a^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}}$$

$$\sin 10^\circ = \frac{|3a + 6|}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{61}}$$

Somit werden mithilfe der Gleichung $\sin 10^\circ = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$ diejenigen Werte von a berechnet, für die der Schnittwinkel von g_a und E die Weite $\alpha = 10^\circ$ hat.

c) Um zu begründen, dass alle Geraden g_a in der Ebene $\mathrm{F}\colon x_3 = 1$ liegen, setzt man den allgemeinen Punkt $\mathrm{P}_t\,(5 + t \cdot a \mid 1 + t \mid 1)$ von g_a in F ein und man erhält:

$$1 = 1$$

Aufgrund der wahren Aussage liegen alle Geraden g_a in der Ebene F.
Alternativ kann man sich auch Folgendes überlegen:
Der Stützpunkt $\mathrm{P}(5 \mid 1 \mid 1)$ von g_a liegt in F, da der x_3-Wert 1 beträgt. Außerdem ist der Richtungsvektor $\vec{u}_a = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonal zum Normalenvektor $\vec{n}_\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt:

$$\vec{u}_a \cdot \vec{n}_\mathrm{F} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Somit liegen alle Geraden g_a in der Ebene F.
Der Richtungsvektor $\vec{u}_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der Geraden h, die durch den Punkt $\mathrm{P}(5 \mid 1 \mid 1)$ geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört, muss folgende beiden Bedingungen erfüllen:
$\vec{u}_h$ muss orthogonal zum Normalenvektor $\vec{n}_\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ von F sein, d.h. das Skalarprodukt der beiden Vektoren muss Null ergeben:

$$\vec{u}_h \cdot \vec{n}_\mathrm{F} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; z = 0$$

Außerdem darf $\vec{u}_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\vec{u}_a = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn $y = 0$ ist. Somit kann man $x = 1$ und damit $\vec{u}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor wählen.
Damit hat die Gerade h beispielsweise die Gleichung: $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.