20 Bleistifte

☐

Bei der Produktion von Bleistiften beträgt der Anteil fehlerhafter Stifte erfahrungsgemäß 5 %.

a) Ein Qualitätsprüfer entnimmt der Produktion zufällig 800 Bleistifte.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte in dieser Stichprobe.
Berechnen Sie $P(X \leqslant 30)$ und $P(X > 40)$ und geben Sie an, was damit jeweils berechnet wird.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X abweicht.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Stifte, die vom Qualitätsprüfer der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % mindestens 10 fehlerhafte Stifte gefunden werden.

c) Der Betrieb erwirbt eine neue Maschine, von der behauptet wird, dass höchstens 2 % der von ihr produzierten Bleistifte fehlerhaft sind.
Diese Hypothese H_0 soll mithilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften überprüft werden.
Bestimmen Sie die Anzahl an fehlerhaften Stiften, bei denen man sich gegen die Hypothese entscheidet, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal 5 % betragen soll.
Bestimmen Sie den Fehler 1. Art.

20 Bleistifte

a) Beachten Sie, dass es sich bei der Entnahme eines Bleistiftes um ein Bernoulli-Experiment handelt, da es nur die beiden Ausgänge «fehlerhaft» und «nicht fehlerhaft» gibt. Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der fehlerhaften Bleistifte fest und bestimmen Sie die zugehörigen Parameter p und n. Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqslant 30)$ erhalten Sie mithilfe der kumulierten Binomialverteilung. Die Wahrscheinlichkeit $P(X > 40)$ erhalten Sie mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung.
Um zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X abweicht, bestimmen Sie zuerst den Erwartungswert von X mit der Formel: $E(X) = n \cdot p$. Bestimmen Sie die möglichen Werte für X und die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2) = P(X \leqslant k_2) - P(X \leqslant k_1 - 1)$ mithilfe der kumulierten Binomialverteilung.

b) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable, welche die Anzahl der fehlerhaften Stifte in einer Stichprobe von n Bleistiften angibt, mit den Parametern n und p fest. Um zu bestimmen, wie viele Stifte vom Qualitätsprüfer der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % mindestens 10 fehlerhafte Stifte gefunden werden, stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen diese durch Ausprobieren mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung.

c) Bestimmen Sie die Nullhypothese: $H_0: p \leqslant \ldots$, legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der fehlerhaften Stifte fest und bestimmen Sie die zugehörigen Parameter p und n. Formulieren Sie zur Nullhypothese die zugehörige Alternativhypothese H_1: $p > \ldots$. Beachten Sie, dass es sich wegen H_1: $p > \ldots$ um einen rechtsseitigen Test mit Irrtumswahrscheinlichkeit α handelt. Also bestimmen Sie durch Ausprobieren ein minimales $k \in \mathbb{N}$ und damit einen Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k, \ldots, n\}$ der Nullhypothese so, dass gilt: $P(X \in \overline{A}) \leqslant \alpha$ bzw. $P(X \geqslant k) \leqslant \alpha$. Verwenden Sie hierzu die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses: $P(X \geqslant k) = 1 - P(X \leqslant k - 1)$. Überlegen Sie damit, wie viele Stifte mindestens fehlerhaft sein müssen, damit die Nullhypothese verworfen wird.
Den Fehler 1. Art erhalten Sie, indem Sie die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass X im Ablehnungsbereich liegt: $\alpha = P\left(X \in \overline{A}\right)$.

20 Bleistifte

a) Bei der Entnahme eines Bleistiftes handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, da es nur die beiden Ausgänge «fehlerhaft» und «nicht fehlerhaft» gibt. Da der Anteil fehlerhafter Stifte erfahrungsgemäß 5 % beträgt, gilt $p = 0,05$ bei Treffer «Stift ist fehlerhaft».
Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der fehlerhaften Stifte in einer Stichprobe von 800 Bleistiften angibt, ist damit binomialverteilt mit den Parametern $n = 800$ und $p = 0,05$.
Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leqslant 30)$, also dass höchstens 30 Stifte fehlerhaft sind, erhält man mithilfe der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(X \leqslant 30) \approx 0,057 = 5,7\%$$

frv.tv/ck

Die Wahrscheinlichkeit $P(X > 40)$, also dass mehr als 40 Stifte fehlerhaft sind, erhält man mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(X > 40) = 1 - P(X \leqslant 40) \approx 1 - 0,542 = 0,458 = 45,8\%$$

frv.tv/ck

Um zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X abweicht, bestimmt man zuerst den Erwartungswert von X:

$$E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0,05 = 40$$

Damit gilt für die Werte von X:

$$31 \leqslant X \leqslant 49$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man mithilfe der kumulierten Binomialverteilung:

frv.tv/ck

$$P(31 \leqslant X \leqslant 49) = P(X \leqslant 49) - P(X \leqslant 30) \approx 0,935 - 0,057 = 0,878$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 87,8 %.

b) Die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der fehlerhaften Stifte in einer Stichprobe von n Bleistiften angibt, ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0,05$. Um zu bestimmen, wie viele Stifte vom Qualitätsprüfer der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % mindestens 10 fehlerhafte Stifte gefunden werden, löst man folgende Ungleichung mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 10) &> 0,98 \\ 1 - P(X \leqslant 9) &> 0,98 \\ 0,02 &> P(X \leqslant 9) \end{aligned}$$

Durch Ausprobieren ergibt sich:

frv.tv/cm

$$n = 345: P(X \leqslant 9) \approx 0,0205$$
$$n = 346: P(X \leqslant 9) \approx 0,0199$$

Somit müssen mindestens 346 Stifte entnommen werden.

c) Da behauptet wird, dass höchstens 2% der produzierten Bleistifte fehlerhaft sind, lautet die Nullhypothese: $H_0: \ p \leqslant 0,02$ bei Treffer «Stift ist fehlerhaft» und $n = 800$.
Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der fehlerhaften Stifte fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $p = 0,02$ und $n = 800$.
Die zugehörige Alternativhypothese lautet H_1: $p > 0,02$.
Wegen H_1: $p > 0,02$ handelt es sich um einen rechtsseitigen Test mit der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$.
Man wird die Nullhypothese verwerfen, wenn bei der Stichprobe k oder mehr fehlerhafte Stifte vorkommen.
Also ist ein minimales $k \in \mathbb{N}$ und damit ein Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{k, \ldots, n\}$ der Nullhypothese so zu bestimmen, dass gilt:

$$\begin{aligned} P(X \in \overline{A}) &\leqslant \alpha \\ P(X \geqslant k) &\leqslant 0,05 \\ 1 - P(X \leqslant k-1) &\leqslant 0,05 \\ 0,95 &\leqslant P(X \leqslant k-1) \end{aligned}$$

Für $n = 800$ und $p = 0,02$ erhält man durch Ausprobieren:

frv.tv/ck

$$P(X \leqslant 22) \approx 0,944$$
$$P(X \leqslant 23) \approx 0,965$$

Also ist $k - 1 = 23 \ \Rightarrow \ k = 24$ das minimale $k \in \mathbb{N}$ und man erhält damit den Ablehnungsbereich:

$$\overline{A} = \{24, \ldots, 800\}$$

Dies bedeutet, dass man sich bei mindestens 24 fehlerhaften Stiften gegen die Nullhypothese entscheidet.
Den Fehler 1. Art erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass X im Ablehnungsbereich liegt:

$$\alpha = P\left(X \in \overline{A}\right) = P(X \geqslant 24) = 1 - P(X \leqslant 23) \approx 1 - 0,965 = 0,035$$

Der Fehler 1. Art beträgt etwa 3,5%.