Mond

☐

Aufgabe A 3.1
Im Verlauf von etwa 30 Tagen ändert der Mond beständig sein Erscheinungsbild (siehe Abbildung).

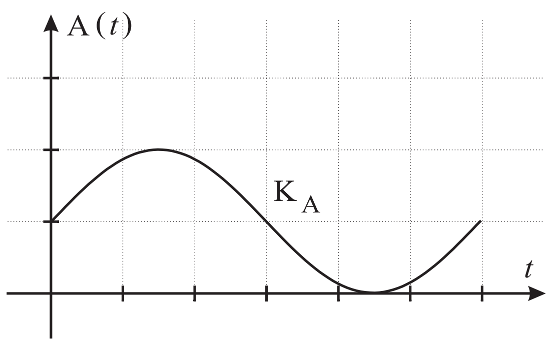
Der beleuchtete Anteil der Mondscheibe wird modellhaft durch die Funktion A mit

$$\mathrm{A}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) \; ; \; 0 \leqslant t \leqslant 30,$$

beschrieben. Dabei steht t für die Tage seit Beobachtungsbeginn, beispielsweise ist $t = 1$ das Ende des ersten Tages.

Bei Vollmond hat der beleuchtete Anteil den Wert 1.

Die Abbildung zeigt den Graph von A:



a) Ergänzen Sie die Skalierung der Achsen in der Abbildung.

Formulieren Sie im Sachzusammenhang eine Frage, die durch Lösen der Gleichung $\mathrm{A}(t) = 0{,}95$ beantwortet werden kann.
Berechnen Sie die Lösungen dieser Gleichung.
Bestimmen Sie rechnerisch die Änderungsrate der Beleuchtung der Mondscheibe zu Beobachtungsbeginn.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der man diejenigen Zeitpunkte bestimmen kann, zu denen die Änderungsrate der Beleuchtung der Mondscheibe halb so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

b) Ermitteln Sie den durchschnittlichen Anteil, der von Beobachtungsbeginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird.

c) Das Modell A soll nun zu einem Modell B abgeändert werden, sodass der Zeitpunkt $t = 0$ der Beleuchtung bei Vollmond entspricht.

Bestimmen Sie hierzu einen Wert für c, sodass die Funktion B mit

$$\mathrm{B}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t + c\right) \; ; \; 0 \leqslant t \leqslant 30,$$

diesen Sachverhalt modelliert.
Geben Sie eine weitere Funktion der Form $\mathrm{C}(t) = a \cdot \cos(b \cdot t - c) + d$ für Modell B an.

Aufgabe A 3.2

Gegeben ist die Funktionenschar g_a durch $g_a(x) = ax^2 - 4x + 2$; $a \neq 0$. Ihr Graph sei K_a.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass alle K_a einen gemeinsamen Punkt $\mathrm{B}(0 \mid 2)$ und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente haben. Erläutern Sie die geometrische Bedeutung dieses Sachverhalts.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve C, auf der die Extrempunkte aller K_a liegen.
Geben Sie denjenigen Punkt von C an, der kein Extrempunkt von K_a ist.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen n_a an K_a an der Stelle $x = 1$ in Abhängigkeit von a.
Berechnen Sie diejenigen Werte von a, für die die Normale n_a die y-Achse in $\mathrm{Z}(0 \mid 1{,}5)$ schneidet.

Mond

Aufgabe A 3.1

a) Eine allgemeine Sinusfunktion hat die Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$.
Dabei gibt a die Streckung in y-Richtung, b die Streckung/Stauchung in x-Richtung, c die Verschiebung in x-Richtung und d die Verschiebung in y-Richtung an. Die Periode p ergibt sich durch $p = \frac{2\pi}{b}$. Überlegen Sie, was beim vorliegenden Fall zutrifft. Damit oder eventuell mithilfe einer Wertetabelle können Sie die Achsen skalieren.
Beachten Sie, dass $\mathrm{A}(t)$ der beleuchtete Anteil der Mondscheibe ist und 0,95 einem Prozentsatz von 95% entspricht. Die Lösungen der Gleichung $\mathrm{A}(t) = 0{,}95$ erhalten Sie durch Substitution und Symmetrieüberlegungen. Substituieren Sie $\frac{\pi}{15} \cdot t = z$ und lösen Sie die Gleichung. Mithilfe des WTR erhalten Sie eine Lösung z_1. Beachten Sie, dass der Graph von $\sin(z)$ achsensymmetrisch zu $z = \frac{\pi}{2}$ verläuft, so dass Sie als zweite Lösung $z_2 = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - z_1\right)$ erhalten. Resubstituieren Sie anschließend, um die t-Werte zu erhalten. Die Änderungsrate des Anteils der Beleuchtung des Mondes zu Beobachtungsbeginn erhalten Sie mithilfe der 1. Ableitung von A, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Setzen Sie $t = 0$ in $\mathrm{A}'(t)$ ein. Um eine Gleichung, mit der man diejenigen Zeitpunkte bestimmen kann, zu denen die Änderungsrate der Beleuchtung des Mondes halb so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn, aufzustellen, beachten Sie, dass $\mathrm{A}'(t)$ der Änderungsrate entspricht.

b) Den durchschnittlichen Anteil $\overline{\mathrm{A}}$, der von Beobachtungsbeginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird, erhalten Sie mithilfe eines Integrals: $\overline{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{b-a} \cdot \displaystyle\int_a^b \mathrm{A}(t)\,\mathrm{d}t$ (Mittelwert).

c) Beachten Sie, dass das Schaubild von Modell A um 7,5 LE nach links verschoben werden muss, um Modell B zu erhalten. Bestimmen Sie also $\mathrm{B}(t) = \mathrm{A}(t + 7{,}5)$ und daraus c. Alternativ können Sie auch die Gleichung $\mathrm{B}(0) = 1$ nach c auflösen. Überlegen Sie, wie die Cosinusfunktion verläuft.

Aufgabe A 3.2

a) Um zu zeigen, dass alle K_a einen gemeinsamen Punkt $\mathrm{B}(0 \mid 2)$ haben, machen Sie eine Punktprobe. Hierzu setzen Sie die Koordinaten von B in die Funktionsgleichung $g_a(x)$ ein. Bei einer wahren Aussage liegt der Punkt B auf allen Graphen von g_a. Um zu zeigen, dass alle K_a in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente haben, stellen Sie die Gleichung der Tangente auf. Die Steigung m_t der Tangente erhalten Sie mithilfe der 1. Ableitung $g_a{}'(x)$. Setzen Sie den x-Wert von B in $g_a{}'(x)$ ein. Die Tangentengleichung erhalten Sie mit der Formel $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$. Prüfen Sie, ob die Tangentengleichung unabhängig von a ist. Um eine Gleichung der Kurve C, auf der die Extrempunkte E_a aller K_a liegen, zu bestimmen, berechnen Sie zuerst die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von a. Hierzu verwenden Sie die 1. und 2. Ableitung von g_a. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $g_a{}'(x) = 0$ nach x auf. Setzen Sie den erhaltenen x-Wert in $g_a{}''(x)$ ein. Falls $g_a{}''(x) \neq 0$ handelt es sich um eine Extremstelle. Den zugehörigen y-Wert erhalten

Sie, indem Sie den x-Wert in $g_a(x)$ einsetzen. Um eine Gleichung der Kurve C, auf der alle diese Extrempunkte liegen, zu ermitteln, lösen Sie den x-Wert nach a auf und setzen das erhaltene Ergebnis in den y-Wert ein. Überlegen Sie, welchen x-Wert der Extrempunkt E_a nie annehmen kann. Setzen Sie diesen x-Wert in die Gleichung von C ein.

b) Die Gleichung der Normalen n_a an K_a an der Stelle $x = 1$ erhalten Sie, indem Sie zuerst den zugehörigen y-Wert bestimmen. Diesen erhalten Sie, indem Sie $x = 1$ in $g_a(x)$ einsetzen. Die Steigung m_t der Tangente an der Stelle $x = 1$ erhalten Sie, indem Sie $x = 1$ in $g_a{}'(x)$ einsetzen. Die Steigung m_n der Normalen ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung. Setzen Sie die Koordinaten von T und m_n in die Normalengleichung $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ ein.
Setzen Sie die Koordinaten von Z in die Normalengleichung ein und lösen Sie die Gleichung mithilfe der abc-Formel nach a auf.

Mond

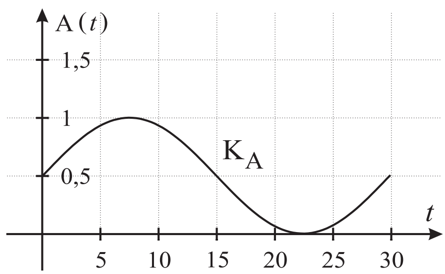
Aufgabe A 3.1

Es ist $A(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)$; $0 \leqslant t \leqslant 30$ (t in Tagen seit Beobachtungsbeginn).

a) Um das Schaubild von A zu skalieren, kann man sich Folgendes überlegen:
Die Amplitude ist $a = \frac{1}{2}$, die Periode p erhält man durch $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$ und die «Mittellinie» ist bei $y = \frac{1}{2}$.
Alternativ kann man auch mithilfe des WTR eine Wertetabelle erstellen:

t	0	$7,5$	15	$22,5$	30
$A(t)$	$0,5$	1	$0,5$	0	$0,5$

Damit ergibt sich folgende Skalierung:



Eine Frage, die durch Lösen der Gleichung $A(t) = 0,95$ beantwortet werden kann, lautet: «Zu welchem Zeitpunkt beträgt der beleuchtete Anteil der Mondscheibe 95%?».
Die Lösungen der Gleichung $A(t) = 0,95$ erhält man durch Substitution und Symmetrieüberlegungen:

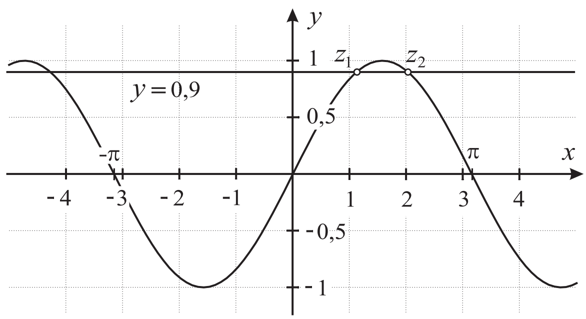
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) &= 0,95 \\ \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) &= 0,45 \\ \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) &= 0,9 \end{aligned}$$

Substituiert man $\frac{\pi}{15} \cdot t = z$, so erhält man die Gleichung:

$$\sin(z) = 0,9$$

mithilfe des WTR erhält man die Lösung $z_1 \approx 1,12$.
Da der Graph von $\sin(z)$ achsensymmetrisch zu $x = \frac{\pi}{2}$ verläuft, erhält man als zweite Lösung

$$z_2 = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 1,12\right) \approx 2,02$$



Durch Resubstitution ergibt sich damit:

$$\frac{\pi}{15} \cdot t \approx 1,12 \ \Rightarrow \ t_1 \approx 5,35$$
$$\frac{\pi}{15} \cdot t \approx 2,02 \ \Rightarrow \ t_2 \approx 9,64$$

Somit beträgt etwa Mitte des 6. Tages und Mitte des 10. Tages der beleuchtete Anteil der Mondscheibe 95%.

Die Änderungsrate des Anteils der Beleuchtung des Mondes zu Beobachtungsbeginn erhält man mithilfe der 1. Ableitung von A, die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$\mathrm{A}'(t) = 0 + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{30} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)$$

Setzt man $t = 0$ in $\mathrm{A}'(t)$ ein, erhält man:

$$\mathrm{A}'(0) = \frac{\pi}{30} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot 0\right) = \frac{\pi}{30} \approx 0,105$$

Somit beträgt die Änderungsrate des Anteils der Beleuchtung des Mondes zu Beobachtungsbeginn etwa 10,5% pro Tag.

Eine Gleichung, mit der man diejenigen Zeitpunkte bestimmen kann, zu denen die Änderungsrate der Beleuchtung des Mondes halb so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn, lautet:

$$\mathrm{A}'(t) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{A}'(0)$$

b) Den durchschnittlichen Anteil $\overline{\mathrm{A}}$, der von Beobachtungsbeginn bis zum Ende des fünfzehnten Tages beleuchtet wird, erhält man mithilfe eines Integrals:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{A}} &= \frac{1}{15-0} \cdot \int_0^{15} \mathrm{A}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{15} \cdot \int_0^{15} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)\right) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{15} \cdot \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)}{\frac{\pi}{15}} \right) \right]_0^{15} \\
&= \frac{1}{15} \cdot \left[\frac{1}{2}t - \frac{15}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t \right) \right]_0^{15} \\
&= \left[\frac{1}{30}t - \frac{1}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t \right) \right]_0^{15} \\
&= \left(\frac{1}{30} \cdot 15 - \frac{1}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot 15 \right) \right) - \left(\frac{1}{30} \cdot 0 - \frac{1}{2\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot 0 \right) \right) \\
&\approx 0,82
\end{aligned}
$$

Somit beträgt der durchschnittliche Anteil etwa 82%.

c) Wenn das Modell A mit

$$\mathrm{A}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t \right)$$

zu einem Modell B mit

$$\mathrm{B}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t + c \right)$$

abgeändert werden soll, sodass der Zeitpunkt $t = 0$ der Beleuchtung bei Vollmond entspricht, so muss das Schaubild von A um 7,5 LE nach links verschoben werden.
Damit erhält man den Funktionsterm:

$$\mathrm{B}(t) = \mathrm{A}(t+7,5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot (t+7,5) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Somit ist $c = \frac{\pi}{2}$.
Alternativ kann man sich auch überlegen, dass gelten muss: $\mathrm{B}(0) = 1$.
Dies führt zu folgender Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot 0 + c \right) &= 1 \\
\sin(c) &= 1 \\
c &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Für $c = \frac{\pi}{2}$ wird Modell A zu Modell B abgeändert.
Eine weitere Funktion der Form $\mathrm{C}(t) = a \cdot \cos(b \cdot t - c) + d$ für Modell B hat beispielsweise die Gleichung:

$$\mathrm{C}(t) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t \right) + \frac{1}{2}$$

Aufgabe A 3.2

Es ist $g_a(x) = ax^2 - 4x + 2\,;\; a \neq 0$. Ihr Graph sei K_a.

a) Um zu zeigen, dass alle K_a einen gemeinsamen Punkt $\mathrm{B}(0 \mid 2)$ haben, macht man eine Punktprobe. Hierzu setzt man die Koordinaten von B in die Funktionsgleichung ein:

$$2 = a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 2$$
$$2 = 2$$

Aufgrund der wahren Aussage liegt der Punkt $\mathrm{B}(0 \mid 2)$ auf allen Graphen von g_a.
Um zu zeigen, dass alle K_a in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente haben, stellt man die Gleichung der Tangente auf. Die Steigung m_t der Tangente erhält man mithilfe der 1. Ableitung ${g_a}'(x) = 2ax - 4$. Setzt man den x-Wert von B in ${g_a}'(x)$ ein, ergibt sich:

$$m_t = {g_a}'(0) = 2a \cdot 0 - 4 = -4$$

Die Tangentengleichung erhält man mit der Formel $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$. Damit ergibt sich:

$$y = -4 \cdot (x - 0) + 2$$
$$y = -4x + 2$$

Da die Tangentengleichung unabhängig von a ist, haben alle K_a im Punkt B eine gemeinsame Tangente.
Da alle K_a einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente haben, berühren sich somit alle K_a im Punkt B.
Um eine Gleichung der Kurve C, auf der die Extrempunkte E_a aller K_a liegen, zu bestimmen, berechnet man zuerst die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von a. Hierzu verwendet man die 1. und 2. Ableitung von g_a:

$${g_a}'(x) = 2ax - 4$$
$${g_a}''(x) = 2a$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung ${g_a}'(x) = 0$ nach x auf:

$$\begin{aligned} 2ax - 4 &= 0 \\ 2ax &= 4 \\ x &= \frac{2}{a} \end{aligned}$$

Setzt man $x = \frac{2}{a}$ in ${g_a}''(x)$ ein, ergibt sich: ${g_a}''\left(\frac{2}{a}\right) = 2a \neq 0$.

Wegen $g_a''\left(\frac{2}{a}\right) \neq 0$ handelt es sich um eine Extremstelle.
Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $x = \frac{2}{a}$ in $g_a(x)$ einsetzt:

$$y = g_a\left(\frac{2}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2}{a}\right) + 2 = a \cdot \frac{4}{a^2} - \frac{8}{a} + 2 = \frac{4}{a} - \frac{8}{a} + 2 = -\frac{4}{a} + 2$$

Somit haben die Extrempunkte aller K_a die Koordinaten $\mathrm{E}_a\left(\frac{2}{a} \mid -\frac{4}{a} + 2\right)$.
Um eine Gleichung der Kurve C, auf der alle diese Extrempunkte liegen, zu ermitteln, löst man $x = \frac{2}{a}$ nach a auf und setzt das erhaltene Ergebnis in $y = -\frac{4}{a} + 2$ ein:

$$x = \frac{2}{a} \ \Rightarrow \ a = \frac{2}{x}$$
$$y = -\frac{4}{a} + 2 = -\frac{4}{\frac{2}{x}} + 2 = -2x + 2$$

Die Extrempunkte aller K_a liegen auf einer Kurve C mit der Gleichung $y = -2x + 2$.
Wegen $x = \frac{2}{a}$ kann der x-Wert des Extrempunkts E_a nie den Wert Null annehmen.
Setzt man $x = 0$ in die Gleichung von C ein, ergibt sich: $y = -2 \cdot 0 + 2 = 2$.
Somit ist der Punkt $\mathrm{Q}(0 \mid 2)$ ein Punkt von C, der kein Extrempunkt von K_a ist.

b) Die Gleichung der Normalen n_a an K_a an der Stelle $x = 1$ erhält man, indem man zuerst den zugehörigen y-Wert bestimmt. Diesen erhält man, indem man $x = 1$ in $g_a(x)$ einsetzt:

$$y = g_a(1) = a \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 2 = a - 2$$

Somit hat ein Punkt T die Koordinaten $\mathrm{T}(1 \mid a - 2)$.
Die Steigung m_t der Tangente an der Stelle $x = 1$ erhält man, indem man $x = 1$ in $g_a'(x) = 2ax - 4$ einsetzt:

$$m_t = g_a'(1) = 2a \cdot 1 - 4 = 2a - 4$$

Die Steigung m_n der Normalen ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung, also:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2a - 4}$$

Setzt man die Koordinaten von T und m_n in die Normalengleichung
$y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ ein, ergibt sich:

$$y = -\frac{1}{2a - 4} \cdot (x - 1) + a - 2$$
$$y = -\frac{1}{2a - 4} \cdot x + \frac{1}{2a - 4} + a - 2$$

Somit hat die Normale n_a die Gleichung: $y = -\frac{1}{2a-4} \cdot x + \frac{1}{2a-4} + a - 2$.
Damit die Normale n_a die y-Achse in $Z(0 \mid 1,5)$ schneidet, setzt man die Koordinaten von Z in die Normalengleichung ein und löst die Gleichung nach a auf:

$$\begin{aligned}
1,5 &= -\frac{1}{2a-4} \cdot 0 + \frac{1}{2a-4} + a - 2 \\
3,5 - a &= \frac{1}{2a-4} \\
(3,5-a) \cdot (2a-4) &= 1 \\
-2a^2 + 11a - 15 &= 0
\end{aligned}$$

Mithilfe der *abc*-Formel erhält man die Lösungen $a_1 = 3$ und $a_2 = 2,5$.