19 Pyramide ☐

Gegeben sind die Punkte $A\,(5 \mid -5 \mid 0)$, $B\,(5 \mid 5 \mid 0)$, $C\,(-5 \mid 5 \mid 0)$ und $D\,(-5 \mid -5 \mid 0)$.
Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S\,(0 \mid 0 \mid 12)$.

a) Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes im Innern der Pyramide, der von allen Seitenflächen und von der Grundfläche genau gleich weit entfernt ist.

c) Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben.
Einer dieser Quader hat den Eckpunkt $Q\,(2{,}5 \mid 2{,}5 \mid 0)$.
Berechnen Sie sein Volumen.
Bei einem anderen dieser Quader handelt es sich um einen Würfel.
Bestimmen Sie die Koordinaten dessen Eckpunktes auf der Kante BS.

19 Pyramide

a) Verwenden Sie für die Parametergleichung der Ebene E, in der die Punkte B, C und S liegen, beispielsweise den Stützpunkt B und die Spannvektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$. Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E erhalten Sie mithilfe des Kreuzprodukts (siehe Seite 42) der Spannvektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$. Alternativ können Sie $\vec{n}$ auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ sowohl auf $\overrightarrow{BC}$ als auch auf $\overrightarrow{BS}$ senkrecht steht. Eine Koordinatengleichung von E erhalten Sie mithilfe der Punkt-Normalenform: $\left(\vec{x}-\vec{b}\right)\cdot\vec{n}=0$. Alternativ können Sie auch die Koordinaten eines gegebenen Punktes in den Ansatz $ax_1+bx_2+cx_3=d$ einsetzen und d bestimmen.
Den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide, die in der x_1x_2-Ebene liegt, eingeschlossen wird, erhalten Sie mithilfe der Formel $\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$, wobei $\vec{n}_1$ ein Normalenvektor von E und $\vec{n}_2$ ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist.
Den Flächeninhalt A des Dreiecks BCS erhalten Sie mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h$. Beachten Sie, dass das Dreieck BCS gleichschenklig ist.
Als Grundseite g des Dreiecks BCS verwenden Sie $g=\overline{BC}$.
Die zugehörige Höhe h ist die Entfernung vom Mittelpunkt M der Punkte B und C zur Spitze S. Berechnen Sie dazu den Betrag des zugehörigen Verbindungsvektors.

b) Beachten Sie, dass der Punkt R aus Symmetriegründen auf der x_3-Achse liegt und damit die Koordinaten $R(0 \mid 0 \mid t)$ mit $0<t<12$ hat. Bestimmen Sie den Abstand d_1 von R zur Bodenfläche der Pyramide, welcher der x_3-Koordinate von R entspricht. Bestimmen Sie den Abstand d_2 von R zur Seitenfläche BCS mit der Abstandsformel. Lösen Sie die Gleichung $d_1=d_2$ durch Fallunterscheidung, da es sich um eine Betragsgleichung handelt. Beachten Sie, dass wegen $0<t<12$ nur eine Lösung in Frage kommt.

c) Skizzieren Sie die Pyramide und den Quader.
Das Volumen V eines Quaders erhalten Sie mit der Formel $V=a\cdot b\cdot c$.
Überlegen Sie mithilfe von Symmetriebetrachtungen, wie Sie die Grundseiten a und b des Quaders erhalten.
Die Höhe c des Quaders erhalten Sie, indem Sie die Koordinaten des Eckpunkts T oberhalb von Q bestimmen. Stellen Sie dazu die Gleichung der Geraden g durch B und S auf sowie die Gleichung der Lotgeraden l, die durch Q geht und orthogonal zur Grundfläche ist. Als Richtungsvektor von l verwenden Sie den Normalenvektor der x_1x_2-Ebene.
Die Koordinaten von T erhalten Sie, indem Sie g und l schneiden. Setzen Sie die beiden Geradengleichungen gleich und lösen Sie das Gleichungssystem. Als Höhe c des Quaders verwenden Sie die x_3-Koordinate von T.
Bei einem Würfel sind alle Kanten gleich lang. Beachten Sie, dass der obere rechte Eckpunkt T über Q eines Quaders auf der Geraden g durch B und S liegt und bestimmen Sie die allgemeinen Koordinaten dieses Punktes P_t.
Beachten Sie, dass aus Symmetriegründen die x_3-Koordinate von P_t doppelt so groß sein muss wie die x_1- bzw. x_2-Koordinate. Lösen Sie die zugehörige Gleichung nach t auf.

19 Pyramide

Gegeben sind die Punkte A$\,(5 \mid -5 \mid 0)$, B$\,(5 \mid 5 \mid 0)$, C$\,(-5 \mid 5 \mid 0)$, D$\,(-5 \mid -5 \mid 0)$ sowie S$\,(0 \mid 0 \mid 12)$.

a) Die Ebene E, in der die Punkte B$\,(5 \mid 5 \mid 0)$, C$\,(-5 \mid 5 \mid 0)$ und S$\,(0 \mid 0 \mid 12)$ liegen, hat beispielsweise den Stützpunkt B und die Spannvektoren $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Damit hat E die Parametergleichung:

$$\mathrm{E}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix};\ s,t \in \mathbb{R}$$

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von S erhält man mithilfe des Kreuzprodukts (siehe Seite 42) der Spannvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann man $\vec{n}$ auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen, da $\vec{n}$ auf beiden Spannvektoren senkrecht steht. Damit gilt:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathrm{I} & n_1 & + & 0 \cdot n_2 & + & 0 \cdot n_3 & = & 0 \\ \mathrm{II} & -5n_1 & - & 5n_2 & + & 12n_3 & = & 0 \end{array}$$

Aus Gleichung I erhält man: $n_1 = 0$.
Setzt man $n_1 = 0$ in Gleichung II ein, ergibt sich: $-5n_2 + 12n_3 = 0$.
Wählt man in Gleichung II z.B. $n_3 = 5$, erhält man: $-5n_2 + 12 \cdot 5 = 0 \ \Rightarrow\ n_2 = 12$.

Damit ergibt sich ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Eine Koordinatengleichung von E erhält man mithilfe der Punkt-Normalenform:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\colon \left(\vec{x} - \vec{b}\right) \cdot \vec{n} = 0 \\
&\mathrm{E}\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \\
&\mathrm{E}\colon (x_1 - 5) \cdot 0 + (x_2 - 5) \cdot 12 + (x_3 - 0) \cdot 5 = 0 \\
&\mathrm{E}\colon 12x_2 - 60 + 5x_3 = 0 \\
&\mathrm{E}\colon 12x_2 + 5x_3 = 60
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die Koordinaten des Punktes $\mathrm{B}\,(5 \mid 5 \mid 0)$ in den Ansatz $12x_2 + 5x_3 = d$ einsetzen:

$$12 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = d \;\Rightarrow\; d = 60$$

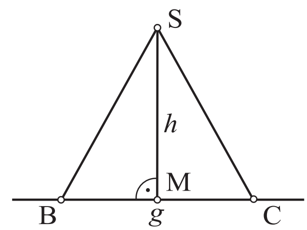
Die Ebene E hat somit die Koordinatengleichung $\mathrm{E}\colon\; 12x_2 + 5x_3 = 60$.

Den Winkel α, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide (x_1x_2-Ebene) eingeschlossen wird, erhält man mithilfe der Formel $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$, wobei $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist. Damit erhält man:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 5 \cdot 1|}{\sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow\; \alpha \approx 67{,}4^\circ$$

Der Winkel α zwischen den beiden Ebenen beträgt etwa $67{,}4^\circ$.



Das Dreieck BCS ist gleichschenklig. Den Flächeninhalt A des gleichschenkligen Dreiecks BCS erhält man mithilfe der Formel $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.

Als Grundseite g des Dreiecks BCS verwendet man $g = \overline{\mathrm{BC}} = 10$.

Die zugehörige Höhe h ist die Entfernung vom Mittelpunkt $\mathrm{M}(0 \mid 5 \mid 0)$ der Punkte B und C zur Spitze S:

$$h = \overline{\mathrm{MS}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{MS}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Damit erhält man:

$$\mathrm{A} = \frac{10 \cdot 13}{2} = 65$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCS beträgt 65 FE.

b) Aus Symmetriegründen liegt der Punkt R im Innern der Pyramide, der von allen Seitenflächen und von der Grundfläche genau gleich weit entfernt, auf der x_3-Achse und hat die Koordinaten $\mathrm{R}(0 \mid 0 \mid t)$ mit $0 < t < 12$.
Der Abstand d_1 von R zur Bodenfläche der Pyramide entspricht der x_3-Koordinate von R, also $\mathrm{d}_1 = t$.
Den Abstand d_2 von R zur Seitenfläche BCS mit der Gleichung $\mathrm{E}\colon\ 12x_2 + 5x_3 = 60$ erhält man mit der Abstandsformel:

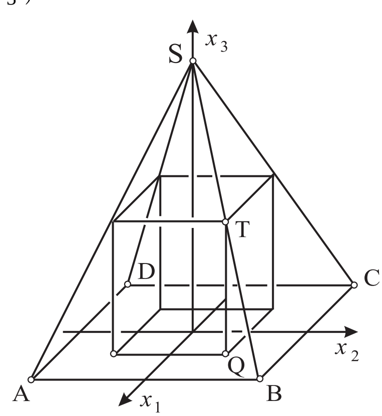
$$\mathrm{d}_2 = \frac{|12 \cdot 0 + 5 \cdot t - 60|}{\sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2}} = \frac{|5t - 60|}{13}$$

Da R von der Bodenfläche und von den Seitenflächen genau gleich weit entfernt ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1 &= \mathrm{d}_2 \\ t &= \frac{|5t-60|}{13} \\ 13t &= |5t - 60| \end{aligned}$$

Diese Betragsgleichung löst man durch Fallunterscheidung:
I) $5t - 60 = 13t$ führt zu $t_1 = -7{,}5$.
II) $5t - 60 = -13t$ führt zu $t_2 = \frac{10}{3}$.
Wegen $0 < t < 12$ kommt nur $t = \frac{10}{3}$ als Lösung in Frage.
Somit hat der Punkt R die Koordinaten $\mathrm{R}\left(0 \mid 0 \mid \frac{10}{3}\right)$.

c) Die Situation von Pyramide und Quader kann anhand der nebenstehenden Zeichnung veranschaulicht werden.
Das Volumen V eines Quaders erhält man mithilfe der Formel $\mathrm{V} = a \cdot b \cdot c$. Ein Quader mit dem Eckpunkt $\mathrm{Q}(2{,}5 \mid 2{,}5 \mid 0)$ hat die Grundseiten $a = 5$ und $b = 5$.
Der Eckpunkt T oberhalb von Q liegt auf der Kante BS, und damit auf der Geraden g durch B und S. Diese hat die Gleichung:



$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Der Eckpunkt T liegt auch auf der Lotgeraden l, die durch Q geht und orthogonal zur Grundfläche ist. Als Richtungsvektor von l verwendet man den Normalenvektor der x_1x_2-Ebene. Damit hat die Lotgerade l die Gleichung:

$$l\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von T erhält man, indem man g und l schneidet:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & 5 & - & 5t & = & 2{,}5 \\ \mathrm{II} & 5 & - & 5t & = & 2{,}5 \\ \mathrm{III} & & & 12t & = & r \end{array}$$

Aus Gleichung I und II ergibt sich: $5 - 5t = 2{,}5 \;\Rightarrow\; t = 0{,}5$
Setzt man $t = 0{,}5$ in Gleichung III ein, erhält man: $12 \cdot 0{,}5 = r \;\Rightarrow\; r = 6$
Setzt man $t = 0{,}5$ in g oder $r = 6$ in l ein, erhält man: $\mathrm{T}\,(2{,}5 \mid 2{,}5 \mid 6)$.
Die Höhe c des Quaders ist gleich groß wie die x_3-Koordinate von T, also $c = 6$.
Damit ergibt sich für das Volumen des Quaders:

$$\mathrm{V} = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150$$

Der Quader hat ein Volumen von 150 VE.

Der obere rechte Eckpunkt T eines Quaders liegt auf der Geraden g durch B und S, hat also die allgemeinen Koordinaten $\mathrm{T}_t\,(5 - 5t \mid 5 - 5t \mid 12t)$.
Die x_1- und die x_2-Koordinaten von T_t sind gleich, genau wie beim Punkt Q in der Grundfläche. Die Grundfläche liegt symmetrisch um den Ursprung herum. Damit der Quader ein Würfel ist, muss die x_3-Koordinate von T_t doppelt so groß sein wie die x_1- bzw. x_2-Koordinate. Also muss gelten:

$$12t = 2 \cdot (5 - 5t) \;\Rightarrow\; t = \frac{5}{11}$$

Setzt man $t = \frac{5}{11}$ in T_t ein, ergibt sich: $\mathrm{T}^*\left(\frac{30}{11} \mid \frac{30}{11} \mid \frac{60}{11}\right)$.
Der Eckpunkt T^* des Würfels auf der Kante BS hat die Koordinaten $\mathrm{T}^*\left(\frac{30}{11} \mid \frac{30}{11} \mid \frac{60}{11}\right)$.