

## 9. Aufgabe

- Anwendungsbezogene Aufgaben
- Graphen zuordnen
- Funktionsterm prüfen
- Mittelwert durch Integration

a) Die Wirkstoffmenge des Schmerzmedikaments DOLOROSA im Blutkreislauf innerhalb der ersten sechs Stunden nach der Einnahme des Medikaments kann vereinfacht mittels einer ganzrationalen Funktion  $f$  dritten Grades beschrieben.

Dabei werden die Werte der  $t$ -Achse als Zeit in Stunden nach der Einnahme, die Funktionswerte  $f(t)$  als Menge des Wirkstoffes im Blut in mg aufgefasst.

Aus den Testdaten von Probanden, die vor Einnahme von DOLOROSA keinen Wirkstoff im Blut hatten, geht hervor, dass sich eine Stunde nach Einnahme des Medikaments 125 mg des Wirkstoffes im Blut befinden. Nach einer weiteren Stunde wird die maximale Wirkstoffmenge gemessen, und nach insgesamt sechs Stunden ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.

Die Abbildungen unten zeigen vier Funktionsgraphen.

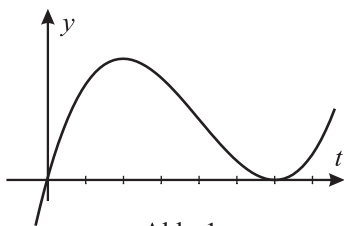


Abb. 1

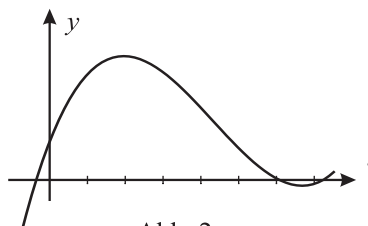


Abb. 2

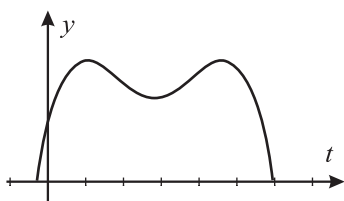


Abb. 3

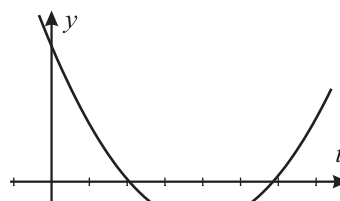


Abb. 4

Geben Sie sowohl den zur Funktion  $f$  als auch den zur Ableitungsfunktion  $f'$  gehörenden Graphen an und begründen Sie Ihre Auswahl.

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  mit  $f(t) = 5t^3 - 60t^2 + 180t$  die angegebenen Daten erfüllt.
- c) Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 6 Stunden.

## 9. Aufgabe

- a) Um den zur Funktion  $f$  gehörigen Graphen zu bestimmen, beachten Sie, dass zu Beginn kein Wirkstoff im Blut ist. Um den zur Ableitungsfunktion  $f'$  gehörigen Graphen zu bestimmen, beachten Sie, dass der Graph von  $f'$  an der Stelle des Maximums von  $f$  eine Nullstelle hat.
- b) Berechnen Sie  $f(0)$ ,  $f(1)$  sowie  $f(6)$  und zeigen Sie, dass  $f'(2) = 0$  und  $f''(2) < 0$  ist, da bei  $t = 2$  der Graph von  $f$  einen Hochpunkt hat.
- c) Die mittlere Wirkstoffmenge  $\bar{W}$  erhalten Sie mithilfe des Integrals  $\bar{W} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t) dt$ .

## 9. Aufgabe

a) Zu Beginn der Beobachtung ist kein Wirkstoff im Blut. Also muss der Graph der Funktion  $f$  durch den Ursprung gehen. Somit gehört zur Funktion  $f$  der Graph von Abbildung 1, da nur dieser bei  $t = 0$  den  $y$ -Wert Null hat.

Bei  $t = 2$  hat die Wirkstoffmenge ihr Maximum erreicht. Zur Ableitungsfunktion  $f'$  gehört der Graph von Abbildung 4, da nur dieser bei  $t = 2$  die  $t$ -Achse schneidet, so dass  $f'(2) = 0$  gilt.

b) Es ist  $f(t) = 5t^3 - 60t^2 + 180t$ .

Setzt man  $t = 0$  in  $f(t)$  ein, ergibt sich:  $f(0) = 5 \cdot 0^3 - 60 \cdot 0^2 + 180 \cdot 0 = 0$ . Somit ist zu Beginn kein Wirkstoff im Blut.

Setzt man  $t = 1$  in  $f(t)$  ein, ergibt sich:  $f(1) = 5 \cdot 1^3 - 60 \cdot 1^2 + 180 \cdot 1 = 125$ . Somit ist nach einer Stunde 125 mg Wirkstoff im Blut.

Setzt man  $t = 6$  in  $f(t)$  ein, ergibt sich:  $f(6) = 5 \cdot 6^3 - 60 \cdot 6^2 + 180 \cdot 6 = 0$ . Somit ist nach 6 Stunden kein Wirkstoff mehr im Blut.

Um nachzuweisen, dass bei  $t = 2$  die Wirkstoffmenge ihr Maximum erreicht hat, benötigt man die 1. und 2. Ableitung von  $f$ :

$$f'(t) = 15t^2 - 120t + 180$$

$$f''(t) = 30t - 120$$

Setzt man  $t = 2$  in  $f'(t)$  ein, ergibt sich:  $f'(2) = 15 \cdot 2^2 - 120 \cdot 2 + 180 = 0$ .

Setzt man  $t = 2$  in  $f''(t)$  ein, ergibt sich:  $f''(2) = 30 \cdot 2 - 120 = -60$ .

Wegen  $f'(2) = 0$  und  $f''(2) = -60 < 0$  hat die Wirkstoffmenge bei  $t = 2$  ihr Maximum. Somit werden durch die Funktion  $f$  alle gegebenen Daten erfüllt.

c) Die mittlere Wirkstoffmenge  $\bar{W}$  in den ersten 6 Stunden erhält man mithilfe eines Integrals mit den Integrationsgrenzen  $t_1 = 0$  und  $t_2 = 6$ :

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 f(t) dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int_0^6 (5t^3 - 60t^2 + 180t) dt \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left[ \frac{5}{4}t^4 - 20t^3 + 90t^2 \right]_0^6 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{5}{4} \cdot 6^4 - 20 \cdot 6^3 + 90 \cdot 6^2 - \left( \frac{5}{4} \cdot 0^4 - 20 \cdot 0^3 + 90 \cdot 0^2 \right) \right) \\ &= 90 \end{aligned}$$

Die mittlere Wirkstoffmenge in den ersten 6 Stunden beträgt 90 mg.