18 Virus

☐

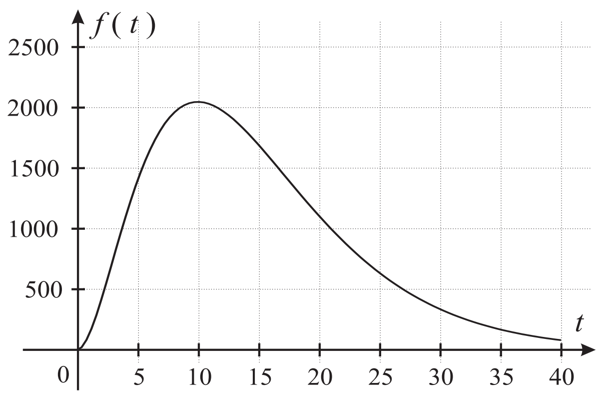
Aufgabe A 5.1

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}2t} \; ; \; t \geqslant 0$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

Der Graph von f ist durch folgende Abbildung gegeben:



a) Weisen Sie nach, dass 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn die Anzahl der Neuerkrankungen am höchsten ist.
Bestimmen Sie den Maximalwert an Neuerkrankungen.
Zeigen Sie, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in welchem es mehr als 1500 Neuerkrankungen pro Woche gibt.
Geben Sie die Bedeutung von $\frac{1}{10}\int_5^{15} f(t)\,\mathrm{d}t$ im Sachzusammenhang an.

b) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Gesundheitsamt gemeldet.
Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Personen gemeldet.
Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $\mathrm{F}(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0{,}2t}$ eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie eine Funktion für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen.
Berechnen Sie, wie viele Personen nach 12 Wochen insgesamt gemeldet sind.
Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40 000 bleiben wird.

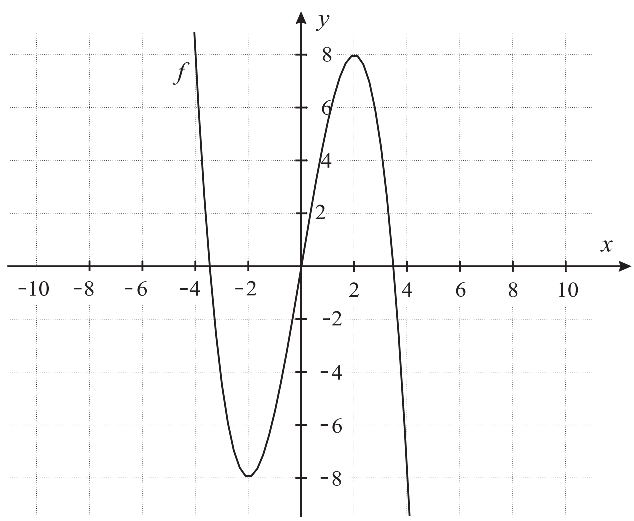
c) In einer benachbarten Stadt mit 30 000 Einwohnern ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden.
Die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen wird beschrieben durch die Funktion

$$\mathrm{B}(t) = \mathrm{a} - b \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

(t in Wochen, $\mathrm{B}(t)$ in Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen).
Bestimmen Sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem 95% aller Einwohner von der Krankheit erfasst sind.

Aufgabe A 5.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6x - \frac{1}{2}x^3$.
Der Graph von f ist durch folgende Abbildung gegeben:



a) Berechnen Sie für $t > 0$ den Wert von t exakt so, dass der Mittelwert der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[0; t]$ möglichst groß ist.

b) Die Gerade $x = u$ mit $0 < u < \sqrt{12}$ schneidet die x-Achse im Punkt $\mathrm{P}(u \mid 0)$ und den Graph von f im Punkt $\mathrm{Q}(u \mid f(u))$.
Damit entsteht das Dreieck OPQ.
Erläutern Sie folgende Rechenschritte und geben Sie deren geometrische Bedeutung an:

$$
\begin{array}{rcl}
\text{(I)} & \mathrm{A}(u) & = \dfrac{u \cdot f(u)}{2} = 3u^2 - \dfrac{1}{4}u^4 \\
\text{(II)} & \mathrm{A}'(u) & = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = 0\,,\, u_2 = \sqrt{6} \\
\text{(III)} & \mathrm{A}''\left(\sqrt{6}\right) & = -12 \\
\text{(IV)} & \mathrm{A}\left(\sqrt{6}\right) & = 9
\end{array}
$$

18 Virus

Aufgabe A 5.1

a) Um nachzuweisen, dass 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn die Anzahl der Neuerkrankungen am höchsten ist, verwenden Sie die 1. Ableitung von f, die Sie mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmen. Setzen Sie $t = 10$ in $f'(t)$ ein. Falls das Ergebnis Null ergibt, ist die notwendige Bedingung für ein Maximum erfüllt. Als hinreichende Bedingung verwenden Sie die gegebene Abbildung. Den Maximalwert an Neuerkrankungen erhalten Sie, indem Sie $t = 10$ in $f(t)$ einsetzen.

   Um zu zeigen, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist, betrachten Sie $f'(t)$. Überlegen Sie, ob ab einem bestimmten t-Wert $f'(t) < 0$ gilt; beachten Sie, dass $e^{-0,2t}$ stets größer als Null ist.

   Den Zeitraum, in welchem es mehr als 1500 Neuerkrankungen pro Woche gibt, erhalten Sie, indem Sie die Gerade $y = 1500$ mit dem Graph von f schneiden und die Schnittstellen näherungsweise ablesen.

   Überlegen Sie, was mithilfe des angegebenen Integrals summiert wird und warum durch 10 geteilt wird.

b) Um zu zeigen, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist, bestimmen Sie mithilfe der Produkt- und Kettenregel die 1. Ableitung von F. Falls $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ ist F eine Stammfunktion von f.

   Die Anzahl $\mathrm{A}(t)$ der Personen, die nach t Wochen insgesamt krank gemeldet sind, erhalten Sie mithilfe der gegebenen Stammfunktion F und der Nebenbedingung, dass zu Beginn 100 Personen erkrankt sind. Als Ansatz verwenden Sie $\mathrm{A}(t) = \mathrm{F}(t) + c$. Mit der Nebenbedingung $\mathrm{A}(0) = 100$ erhalten Sie c. Die Anzahl der Personen, die nach 12 Wochen insgesamt krank gemeldet sind, erhalten Sie, indem Sie $t = 12$ in $\mathrm{A}(t)$ einsetzen.

   Um nachzuweisen, dass die Anzahl der Meldungen unter 40 000 bleiben wird, bestimmen Sie den Grenzwert von $\mathrm{A}(t)$ für $t \longrightarrow \infty$. Überlegen Sie, ob $\mathrm{A}'(t) > 0$ für $t > 0$ ist und beachten Sie, dass $e^{-0,2t}$ für $t \longrightarrow \infty$ gegen Null geht.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert von $\mathrm{B}(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ und Sie erhalten damit a.

   Mit der Nebenbedingung, dass zu Beginn $(t = 0)$ bereits die Hälfte der Einwohner $(15\,000)$ an diesem Virus erkrankt sind, erhalten Sie b sowie die Funktionsgleichung von B. Den Zeitpunkt, zu dem 95% aller Einwohner von der Krankheit erfasst sind, erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $\mathrm{B}(t) = 0,95 \cdot 30\,000$ durch Logarithmieren nach t auflösen.

Aufgabe A 5.2

a) Den Mittelwert $\overline{m}(t)$ der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[0 : t]$ erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Berechnen Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $\overline{m}(t)$ das Maximum. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $\overline{m}'(t) = 0$ nach t auf. Überlegen Sie, welche Lösung in Frage kommt. Setzen Sie den entsprechenden t-Wert in $\overline{m}''(t)$ ein. Falls das Ergebnis kleiner als Null ist, handelt es sich um ein Maximum.

b) Skizzieren Sie das Dreieck OPQ. Überlegen Sie, welche Bedeutung $A(u)$ für das Dreieck OPQ hat. Beachten Sie, dass mit der 1. und 2. Ableitung einer Funktion Extremwerte bestimmt werden. Überlegen Sie, welcher Art der Extremwert ist.

18 Virus

Aufgabe A 5.1

Es ist $f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0,2t}$; $t \geqslant 0$ (Zeit t in Wochen seit Beobachtungsbeginn).

a) Um nachzuweisen, dass 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn die Anzahl der Neuerkrankungen am höchsten ist, verwendet man die 1. Ableitung von f, die man mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt:

$$f'(t) = 300 \cdot t \cdot e^{-0,2t} + 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) = \left(300 \cdot t - 30 \cdot t^2\right) \cdot e^{-0,2t} = 30t \cdot (10-t) \cdot e^{-0,2t}$$

Setzt man $t = 10$ in $f'(t)$ ein, ergibt sich:

$$f'(10) = \left(300 \cdot 10 - 30 \cdot 10^2\right) \cdot e^{-0,2 \cdot 10} = 0$$

Da $f'(t)$ bei $t = 10$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$ wechselt, handelt es sich um ein Maximum.

Also ist 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn die Anzahl der Neuerkrankungen am höchsten.

Den Maximalwert an Neuerkrankungen erhält man, indem man $t = 10$ in $f(t)$ einsetzt:

$$f(10) = 150 \cdot 10^2 \cdot e^{-0,2 \cdot 10} \approx 2030$$

Somit gibt es maximal etwa 2030 Neuerkrankungen pro Woche.

Um zu zeigen, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist, betrachtet man

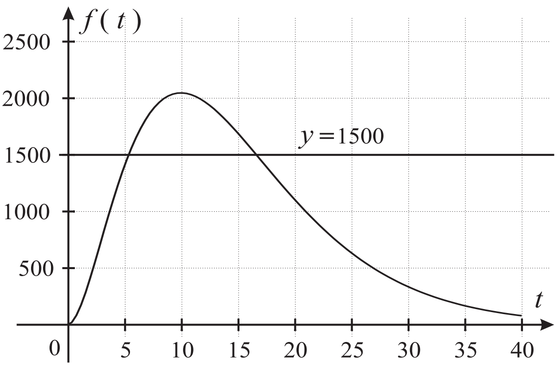
$$f'(t) = \left(300 \cdot t - 30 \cdot t^2\right) \cdot e^{-0,2t} = 30t \cdot (10-t) \cdot e^{-0,2t}$$

Es ist $e^{-0,2t}$ stets größer als Null. Der Term $30t \cdot (10-t)$ ist für $t < 0$ oder $t > 10$ negativ. Somit gilt für $t > 10$:

$$f'(t) < 0$$

Damit ist für $t > 10$ die Funktion f streng monoton fallend und die momentane Erkrankungsrate ist nach 10 Wochen rückläufig.

Den Zeitraum, in welchem es mehr als 1500 Neuerkrankungen pro Woche gibt, erhält man, indem man die Gerade $y = 1500$ mit dem Graphen von f schneidet:



Anhand der gegebenen Abbildung ergeben sich die Schnittstellen $t_1 \approx 5$ und $t_2 \approx 17$. Somit gibt es im Zeitraum von etwa 5 Wochen bis etwa 17 Wochen mehr als 1500 Neuerkrankungen pro Woche.

Mithilfe des angegebenen Integrals $\frac{1}{10}\int_5^{15} f(t)\,\mathrm{d}t$ werden die durchschnittlichen Neuerkrankungen pro Woche im Zeitraum von 5 Wochen bis 15 Wochen berechnet, da durch das Integral die Neuerkrankungen während 10 Wochen summiert werden und anschließend durch 10 geteilt wird.

b) Um zu zeigen, dass die Funktion F mit $\mathrm{F}(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t}$ eine Stammfunktion von f ist, bestimmt man mithilfe der Produkt- und Kettenregel die 1. Ableitung von F:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}'(t) &= -750 \cdot \left((2t+10) \cdot e^{-0,2t} + \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2)\right) \\ &= -750 \cdot \left(\left(2t + 10 - 0,2t^2 - 2t - 10\right) \cdot e^{-0,2t}\right) \\ &= -750 \cdot \left(-0,2t^2 \cdot e^{-0,2t}\right) \\ &= 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0,2t} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ ist F eine Stammfunktion von f.

Die Anzahl $\mathrm{A}(t)$ der Personen, die nach t Wochen insgesamt krank gemeldet sind, erhält man mithilfe der gegebenen Stammfunktion $\mathrm{F}(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10 \cdot t + 50\right) \cdot e^{-0,2t}$ und der Nebenbedingung, dass zu Beginn 100 Personen erkrankt sind. Als Ansatz verwendet man:

$$\mathrm{A}(t) = \mathrm{F}(t) + c$$

Mit der Nebenbedingung $\mathrm{A}(0) = 100$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(0) &= \mathrm{F}(0) + c \\ 100 &= -750 \cdot \left(0^2 + 10 \cdot 0 + 50\right) \cdot e^{-0,2 \cdot 0} + c \\ 100 &= -37\,500 + c \\ 37\,600 &= c \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Anzahl $A(t)$ der Personen, die nach t Wochen insgesamt krank gemeldet sind:

$$A(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t} + 37\,600$$

Die Anzahl der Personen, die nach 12 Wochen insgesamt krank gemeldet sind, erhält man, indem man $t = 12$ in $A(t)$ einsetzt:

$$\begin{aligned} A(12) &= -750 \cdot \left(12^2 + 10 \cdot 12 + 50\right) \cdot e^{-0,2 \cdot 12} + 37\,600 \\ &\approx 16236 \end{aligned}$$

Nach 12 Wochen sind insgesamt etwa 16 236 Personen krank gemeldet.

Um nachzuweisen, dass die Anzahl der Meldungen unter 40 000 bleiben wird, bestimmt man den Grenzwert von $A(t)$ für $t \to \infty$. Wegen $A'(t) = f(t) > 0$ für $t > 0$ ist $A(t)$ streng monoton wachsend. Da $e^{-0,2t}$ für $t \to \infty$ gegen Null geht, gilt:

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = 37\,600 < 40\,000$$

Damit wird die Anzahl der Meldungen unter 40 000 bleiben.

c) Es ist $B(t) = a - b \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.
Da im Laufe der Zeit alle 30 000 Einwohner von der Krankheit erfasst werden können, geht $B(t)$ für $t \to \infty$ gegen 30 000. Da $b \cdot e^{-0,1 \cdot t}$ für $t \to \infty$ gegen Null und somit $B(t)$ gegen a geht, muss gelten: $a = 30\,000$.
Damit erhält man:

$$B(t) = 30\,000 - b \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

Mit der Nebenbedingung, dass zu Beginn $(t = 0)$ bereits die Hälfte der Einwohner $(15\,000)$ an diesem Virus erkrankt ist, gilt:

$$\begin{aligned} B(0) &= 15\,000 \\ 30\,000 - b \cdot e^{-0,1 \cdot 0} &= 15\,000 \\ 15\,000 &= b \end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt:

$$B(t) = 30\,000 - 15\,000 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$$

Den Zeitpunkt, zu dem 95% aller Einwohner von der Krankheit erfasst sind, erhält man, indem man die Gleichung $B(t) = 0,95 \cdot 30\,000$ nach t auflöst:

$$\begin{aligned} 30\,000 - 15\,000 \cdot e^{-0,1 \cdot t} &= 0,95 \cdot 30\,000 \\ 30\,000 - 0,95 \cdot 30\,000 &= 15\,000 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \\ 1500 &= 15\,000 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0,1 &= e^{-0,1\cdot t} \\
\ln(0,1) &= -0,1\cdot t \\
\frac{\ln(0,1)}{-0,1} &= t \\
t &\approx 23
\end{aligned}
$$

Nach etwa 23 Wochen sind 95% aller Einwohner von der Krankheit erfasst.

Aufgabe A 5.2

Es ist $f(x) = 6x - \frac{1}{2}x^3$.

a) Den Mittelwert $\overline{m}(t)$ der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[\,0\,:\,t\,]$ erhält man mithilfe eines Integrals:

$$
\begin{aligned}
\overline{m}(t) &= \frac{1}{t}\cdot\int_0^t \left(6x - \frac{1}{2}x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\cdot\left[3x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^t = \frac{1}{t}\cdot\left(\left(3t^2 - \frac{1}{8}t^4\right) - \left(3\cdot 0^2 - \frac{1}{8}\cdot 0^4\right)\right) \\
&= 3t - \frac{1}{8}t^3
\end{aligned}
$$

Damit der Mittelwert möglichst groß ist, berechnet man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $\overline{m}(t)$ das Maximum:

$$
\begin{aligned}
\overline{m}'(t) &= 3 - \frac{3}{8}t^2 \\
\overline{m}''(t) &= -\frac{3}{4}t
\end{aligned}
$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $\overline{m}'(t) = 0$ nach t auf:

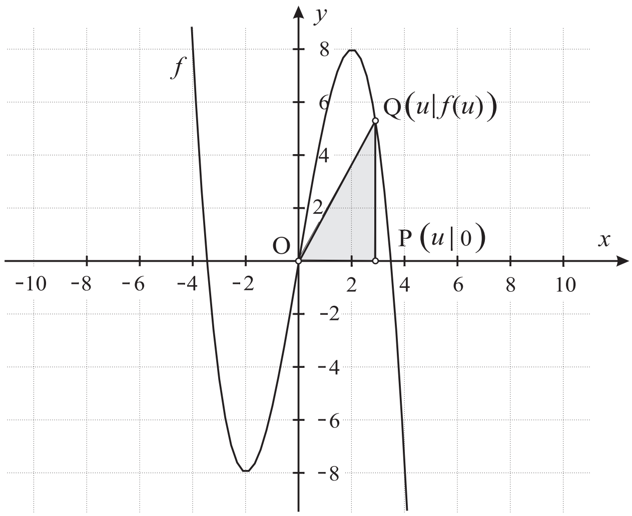
$$
\begin{aligned}
3 - \frac{3}{8}t^2 &= 0 \\
8 &= t^2 \\
\pm\sqrt{8} &= t_{1,2}
\end{aligned}
$$

Wegen $t > 0$ kommt nur $t = \sqrt{8}$ als Lösung in Frage.
Setzt man $t = \sqrt{8}$ in $\overline{m}''(t)$ ein, ergibt sich:

$$
\overline{m}''\left(\sqrt{8}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\sqrt{8} < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum}
$$

Somit ist für $t = \sqrt{8}$ der Mittelwert am größten.

b) Zeichnet man die Punkte P und Q ein, erhält man folgenden Sachverhalt:



Durch den Rechenschritt (I) $\mathrm{A}(u) = \frac{u \cdot f(u)}{2} = 3u^2 - \frac{1}{4}u^4$ wird der Flächeninhalt $\mathrm{A}(u)$ des Dreiecks OPQ in Abhängigkeit von u bestimmt.

Durch den Rechenschritt (II) $\mathrm{A}'(u) = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = 0\,, u_2 = \sqrt{6}$ wird die 1. Ableitung von $\mathrm{A}(u)$ gleich Null gesetzt, um die Extremwerte von $\mathrm{A}(u)$ zu bestimmen. Als mögliche Lösungen erhält man $u_1 = 0$ und $u_2 = \sqrt{6}$.

Durch den Rechenschritt (III) $\mathrm{A}''\left(\sqrt{6}\right) = -12$ wird die Art des Extremwerts bestimmt. Wegen $\mathrm{A}''\left(\sqrt{6}\right) = -12 < 0$ handelt es sich um ein Maximum.

Somit hat das Dreieck OPQ für $u = \sqrt{6}$ einen maximalen Flächeninhalt.

Wegen des Rechenschritts (IV) $\mathrm{A}\left(\sqrt{6}\right) = 9$ beträgt der maximale Flächeninhalt 9 FE.