Weizen

☐

Weizensaatgut hat eine Keimfähigkeit von

80 %.

a) Aus einem großen Behälter werden 200 Weizenkörner entnommen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: Es keimen mehr als 150 Weizenkörner.
B: Es keimen höchstens 15 % der entnommenen Weizenkörner nicht.
C: Es keimen genau so viele Weizenkörner, wie man erwarten würde.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der keimenden Weizenkörner bei 200 entnommenen Weizenkörnern an.
Es gibt zum Erwartungswert μ von X symmetrische Intervalle $I_c = [\mu - c; \mu + c]$, sodass diese Anzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% in I_c liegt.
Bestimmen Sie die kleinstmögliche Zahl c.

c) Ein Großhändler gibt an, dass sein Weizensaatgut eine Keimfähigkeit von mindestens 80 % hat.
Mehrere Kunden vermuten, dass die Keimfähigkeit in Wirklichkeit kleiner ist.
Deswegen wird die Aussage des Großhändlers mithilfe eines Tests auf einem Signifikanzniveau von 10 % überprüft, indem 500 Weizenkörner untersucht werden.
Als Nullhypothese wird die Angabe des Großhändlers verwendet.

Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.

Die tatsächliche Keimfähigkeit des Saatguts beträgt 82 %.
Bestimmen Sie in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird.

Weizen

a) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der keimenden Weizenkörner mit den Parametern n und p fest.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A erhalten Sie mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung.
Überlegen Sie, wie viele Weizenkörner keimen, wenn höchstens 15 % der entnommenen Weizenkörner nicht keimen. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B erhalten Sie wieder mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung.
Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C berechnen Sie zuerst den Erwartungswert von X mithilfe der Formel: $E(X) = \mu = n \cdot p$. Anschließend verwenden Sie die Binomialverteilung.

b) Beachten Sie, dass die Zufallsvariable X, welche die Anzahl der keimenden Weizenkörner unter 200 entnommenen Weizenkörnern beschreibt, binomialverteilt ist mit den Parametern n und p. Den Erwartungswert μ von X erhalten Sie mit der Formel: $\mu = n \cdot p$. Bestimmen Sie mithilfe der kumulierten Binomialverteilung für zum Erwartungswert von X symmetrische Intervalle $I_c = [\mu - c\,; \mu + c]$ die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Beachten Sie, dass gilt: $P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2) = P(X \leqslant k_2) - P(X \leqslant k_1 - 1)$.

c) Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der keimenden Weizenkörner mit den Parametern n und p fest. Formulieren Sie die Nullhypothese (Angabe des Großhändlers) $H_0: p \geqslant \ldots$ bei Treffer «Weizenkorn keimt» sowie die zugehörige Alternativhypothese $H_1: p < \ldots$. Beachten Sie, dass es sich wegen $H_1: p < \ldots$ um einen linksseitigen Test mit Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) α handelt. Also bestimmen Sie durch Ausprobieren ein maximales $k \in \mathbb{N}$ und damit einen Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, \ldots, k\}$ der Nullhypothese so, dass gilt: $P(X \in \overline{A}) \leqslant \alpha$ bzw. $P(X \leqslant k) \leqslant \alpha$. Überlegen Sie damit, wann die Nullhypothese verworfen wird, d.h. wann sich der Verdacht bestätigt.
Für den tatsächlichen Fall legen Sie Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der keimenden Weizenkörner mit den Parametern p^* und n fest. Bestimmen Sie mithilfe der kumulierten Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass Y im berechneten Ablehnungsbereich $\overline{A}$ liegt, also $P(Y \leqslant k)$.

Weizen

a) Da aus einem großen Behälter 200 Weizenkörner entnommen werden, ist die Wahrscheinlichkeit zu keimen für jedes entnommene Weizenkorn gleich groß, nämlich $p = 0,8$. Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der keimenden Weizenkörner fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 200$ und $p = 0,8$.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: «Es keimen mehr als 150 Weizenkörner.» erhält man mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung:

frv.tv/ck

$$P(A) = P(X > 150) = 1 - P(X \leqslant 150) \approx 1 - 0,049 = 0,951$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt etwa $95,1\,\%$.
Wenn höchstens $15\,\%$ der entnommenen Weizenkörner nicht keimen, so ist dies gleichbedeutend damit, dass mindestens $85\,\%$ der entnommenen Weizenkörner keimen, also dass mindestens 170 Weizenkörner keimen.
Damit erhält man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: «Es keimen höchstens $15\,\%$ der entnommenen Weizenkörner nicht.» mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und der kumulierten Binomialverteilung:

frv.tv/ck

$$P(B) = P(X \geqslant 170) = 1 - P(X \leqslant 169) \approx 1 - 0,957 = 0,043$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt etwa $4,3\,\%$.
Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C: «Es keimen genau so viele Weizenkörner, wie man erwarten würde.» berechnet man zuerst den Erwartungswert von X:

$$E(X) = \mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,8 = 160$$

Damit ergibt sich mithilfe der Binomialverteilung:

frv.tv/ci

$$P(C) = P(X = 160) \approx 0,070$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C beträgt etwa $7,0\,\%$.

b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der keimenden Weizenkörner von 200 entnommenen Weizenkörnern. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 200$ und $p = 0,8$.
Den Erwartungswert μ von X erhält man durch:

$$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,8 = 160$$

mithilfe der kumulierten Binomialverteilung erhält man für Intervalle $I_c = [\mu - c\,; \mu + c]$, die zum Erwartungswert von X symmetrisch sind, die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(150 \leqslant X \leqslant 170) = P(X \leqslant 170) - P(X \leqslant 149) \approx 0,972 - 0,034 = 0,938$$
$$P(149 \leqslant X \leqslant 171) = P(X \leqslant 171) - P(X \leqslant 148) \approx 0,982 - 0,024 = 0,958$$

Somit ist das kleinstmögliche Intervall, in dem die Anzahl der keimenden Weizenkörner mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% liegt, das Intervall: $[149; 171]$.
Damit gilt: $c = 171 - 160 = 11$.
Somit ist $c = 11$ die kleinstmögliche Zahl.

c) Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der keimenden Weizenkörner fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $p = 0,8$ und $n = 500$, da es sich um eine Bernoullikette handelt.
Die Nullhypothese (Angabe des Großhändlers) lautet: $H_0: p \geqslant 0,8$ bei Treffer «Weizenkorn keimt». Die zugehörige Alternativhypothese lautet H_1: $p < 0,8$.
Wegen H_1: $p < 0,8$ handelt es sich um einen linksseitigen Test mit Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) $\alpha = 10\%$.
Man wird die Nullhypothese verwerfen, wenn bei den 500 Weizenkörnern deutlich weniger als 400 (Erwartungswert $E(X) = n \cdot p = 500 \cdot 0,8 = 400$) keimen.
Also ist ein maximales $k \in \mathbb{N}$ und damit ein Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, ..., k\}$ der Nullhypothese so zu bestimmen, dass gilt:

$$P(X \in \overline{A}) \leqslant \alpha$$
$$P(X \leqslant k) \leqslant 0,1$$

Für $n = 500$ und $p = 0,8$ ergibt sich durch Ausprobieren:

frv.tv/ck

$$P(X \leqslant 387) \approx 0,0826$$
$$P(X \leqslant 388) \approx 0,1004$$

Also ist $k = 387$ das maximale $k \in \mathbb{N}$ und man erhält damit den Ablehnungsbereich:

$$\overline{A} = \{0, ..., 387\}$$

Damit ergibt sich folgende Entscheidungsregel:
Wenn bei 500 Weizenkörner höchstens 387 keimen, wird die Nullhypothese verworfen.
Mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 10 % kann der Verdacht bestätigt werden, dass die Wahrscheinlichkeit p für «Weizenkorn keimt» geringer als 80 % ist.
Keimen mehr als 387 Weizenkörner, wird der Verdacht nicht bestätigt.

Wenn die tatsächliche Keimfähigkeit des Saatguts 82 % beträgt, legt man Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der keimenden Weizenkörner mit den Parametern $p^* = 0,82$ und $n = 500$ fest.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird, erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass Y im Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, \ldots, 387\}$ liegt. Mit $p^* = 0,82$ und $n = 500$ ergibt sich:

frv.tv/ck

$$P(Y \leqslant 387) \approx 0,005$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in diesem Fall die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird, beträgt etwa $0,5\,\%$.