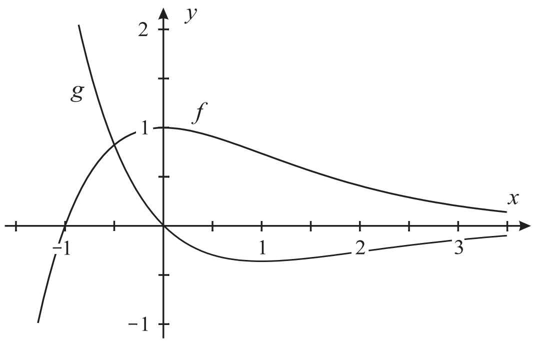
Notiz-Rand

17. Aufgabe

- Funktionsgleichung bestimmen
- Länge einer Strecke
- Stammfunktion
- Flächenberechnung

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch $f(x) = (x+a) \cdot e^{-x}$ und $g(x) = -(x+b) \cdot e^{-x}$. Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt:



a) Bestimmen Sie a und b.

b) Die Parallele zur y-Achse mit $x = u$, $u \geqslant 0$, schneidet den Graphen von f im Punkt $P_u\,(u \mid f(u))$ und den Graphen von g im Punkt $Q_u\,(u \mid g(u))$.
Bestimmen Sie einen Rechenausdruck für die Länge $d(u)$ der Strecke $\overline{P_uQ_u}$.

c) Zeigen Sie, dass f eine Stammfunktion von g ist.
Der Graph von g und die x-Achse begrenzen im 4. Feld eine ins Unendliche reichende Fläche.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Notiz-Rand

17. Aufgabe

a) Um die Parameter a und b zu bestimmen, betrachten Sie die Nullstellen der Graphen von f bzw. g.
Stellen Sie Gleichungen auf und lösen Sie diese. Bestimmen Sie damit $f(x)$ und $g(x)$.

b) Die Länge $d(u)$ der Strecke $\overline{P_uQ_u}$ erhalten Sie, indem Sie die Differenz der y-Werte der Punkte P_u und Q_u bilden.

c) Um zu zeigen, dass f eine Stammfunktion von g ist, bestimmen Sie die 1. Ableitung von f mithilfe der Produkt- und Kettenregel. Falls $f'(x) = g(x)$, ist f eine Stammfunktion von g.
Den Flächeninhalt der ins Unendliche reichenden Fläche, die der Graph von g und die x-Achse im 4. Feld begrenzen, erhalten Sie mithilfe eines Integrals. Als obere Integrationsgrenze wählen Sie zunächst $x = z$ und bestimmen den Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von z. Beachten Sie, dass die x-Achse oberhalb des Graphen von g verläuft. Überlegen Sie, welcher Term für $z \to \infty$ gegen Null geht und bestimmen Sie damit den gesuchten Flächeninhalt.

Notiz-Rand

17. Aufgabe

a) Um die Parameter a und b zu bestimmen, betrachtet man die Nullstellen der Graphen von f bzw. g.
Wegen $f(-1) = 0$ gilt:

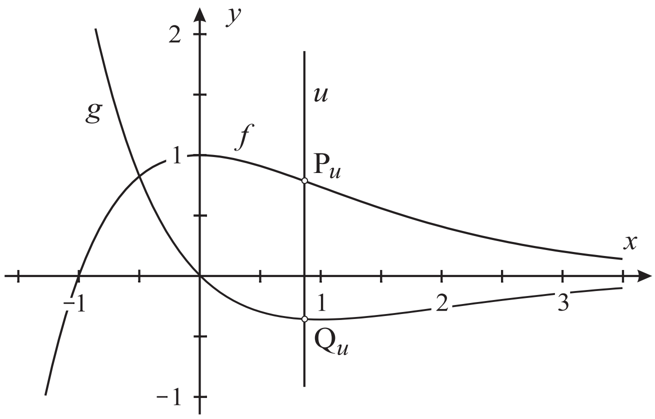
$$(-1+a) \cdot e^{-(-1)} = 0 \Rightarrow a = 1$$

Wegen $g(0) = 0$ gilt:

$$-(0+b) \cdot e^{-0} = 0 \Rightarrow b = 0$$

Damit erhält man die Funktionen $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ und $g(x) = -x \cdot e^{-x}$.

b) Die Länge $d(u)$ der Strecke $\overline{P_u Q_u}$ ist gleich der Differenz der y-Werte der Punkte P_u und Q_u.



Daher berechnet man $d(u)$ als Differenz der Funktionswerte von f und g an der Stelle $x = u$. Da $f(u) > g(u)$ für $u \geqslant 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} d(u) &= f(u) - g(u) \\ &= (u+1)e^{-u} - \left(-u \cdot e^{-u}\right) \\ &= (u+1)e^{-u} + u \cdot e^{-u} \\ &= (2u+1) \cdot e^{-u} \end{aligned}$$

c) Um zu zeigen, dass $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von $g(x) = -x \cdot e^{-x}$ ist, bestimmt man die 1. Ableitung von f mithilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (1-x-1) \cdot e^{-x} = -x \cdot e^{-x} = g(x)$$

Wegen $f'(x) = g(x)$ ist f eine Stammfunktion von g.
Den Flächeninhalt der ins Unendliche reichenden Fläche, die der Graph von g und die x-Achse im 4. Feld begrenzen, erhält man mithilfe eines Integrals. Als obere Integrationsgrenze wählt man zunächst $x = z$ und bestimmt den Inhalt der Fläche in Abhängigkeit von

Notiz-Rand

z. Da die x-Achse oberhalb des Graphen von g verläuft, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(z) &= \int_0^z (0 - g(x))\,\mathrm{dx} \\
&= \Big[-f(x)\Big]_0^z \\
&= \Big[-(x+1)\cdot e^{-x}\Big]_0^z \\
&= -(z+1)\cdot e^{-z} - \big(-(0+1)\cdot e^{-0}\big) \\
&= -(z+1)\cdot e^{-z} + 1
\end{aligned}$$

Für $z \to \infty$ geht e^{-z} gegen Null und auch der Term $-(z+1)\cdot e^{-z}$ gegen Null und damit $\mathrm{A}(z)$ gegen 1.
Somit beträgt der gesuchte Flächeninhalt 1 FE.