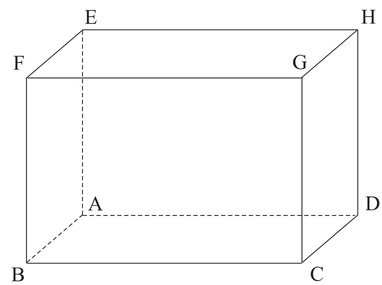
Kiste

☐

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A\,(0\mid 0\mid 0)$, $B\,(3\mid 0\mid 0)$, $D\,(0\mid 5\mid 0)$ und $F\,(3\mid 0\mid 4)$ festgelegt.
Die Fläche EFGH stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar.
Dieser ist drehbar um die Kante EH.
Weiterhin ist für jedes $t \geqslant 0$ eine Ebene E_t gegeben durch die Gleichung
$E_t:\ tx_1 - x_3 = -4$.



(Skizze nicht maßstabsgerecht)

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Ebene E_t, in welcher der Deckel bei geschlossener Kiste liegt.
Prüfen Sie, ob der Deckel in einer Ebene E_t liegt, wenn er um 90° geöffnet ist?

b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel.
Berechnen Sie die Koordinaten von P.

c) Berechnen Sie den Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E_t, in welcher der Deckel liegt, wenn der Öffnungswinkel 60° beträgt.
Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90^\circ$.

Geometrie

Das Kreuzprodukt

Wenn man einen Vektor $\vec{n}$ sucht, der senkrecht auf zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht (der Normalenvektor), geschieht dies einfach und schnell mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt):

$$\vec{n} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2 \\ a_3b_1 & - & a_1b_3 \\ a_1b_2 & - & a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Die Merkhilfe dazu:

1. Beide Vektoren werden je zweimal untereinandergeschrieben, dann werden die erste und die letzte Zeile gestrichen.
2. Anschließend wird «über Kreuz» multipliziert. Dabei erhalten die abwärts gerichteten Pfeile ein positives und die aufwärts gerichteten Pfeile ein negatives Vorzeichen.
3. Die einzelnen Komponenten werden subtrahiert – fertig!

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich für den gesuchten Vektor:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:
Mithilfe des Kreuzprodukts lässt sich die Fläche des Dreiecks ABC direkt ausrechnen. Es ist:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

Kiste

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte der Kiste.
Den Abstand zwischen den Kanten AB und GH erhalten Sie, indem Sie zum Beispiel die Entfernung der Punkte A und H berechnen.
Stellen Sie die Gleichung der Geraden g durch E und H auf und setzen Sie diese in die Ebenengleichung E_t ein. Bei einer wahren Aussage liegt die Gerade in E_t.
Setzen Sie die Koordinaten von F in E_t ein und lösen Sie die Gleichung nach t auf, um diejenige Ebene E_t zu bestimmen, in welcher der Deckel bei geschlossener Kiste liegt.
Beim Öffnen des Deckels um 90° geht der Punkt F in einen Punkt $\overline{\mathrm{F}}$ über. Bestimmen Sie den Punkt $\overline{\mathrm{F}}$ und setzen Sie die Koordinaten von $\overline{\mathrm{F}}$ in E_t ein. Bei einem Widerspruch liegt der Deckel nicht in einer Ebene E_t.

b) Setzen Sie $t = 2$ in E_t ein.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M_{EF} der Kante EF.
Stellen Sie eine Lotgerade l durch M_{EF} orthogonal zu E_2 auf (der Richtungsvektor von l ist der Normalenvektor von E_2).
Sie erhalten die Koordinaten von P, indem Sie l und E_2 schneiden.

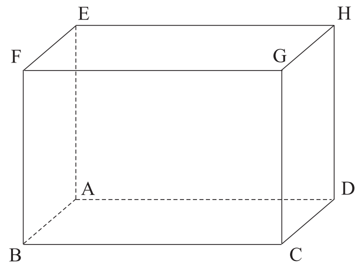
c) Um den Öffnungswinkel α zu bestimmen, setzen Sie einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$ von E_2 und einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ der Ebene EFGH, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist, in folgende Formel ein: $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$

Um diejenige Ebene E_t zu bestimmen, in welcher der Deckel bei einem Öffnungswinkel von 60° liegt, setzen Sie einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_t}$ von E_t, einen Normalenvektor $\overrightarrow{n_1}$ der Ebene EFGH und $\alpha = 60^\circ$ in die Formel $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|}$ ein und lösen die erhaltene Gleichung durch Quadrieren nach t auf.

Lösen Sie allgemein die Gleichung $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|}$ durch Quadrieren nach t auf, um den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel angeben zu können.

Kiste

a)



Die Koordinaten der Eckpunkte der Kiste sind $A\,(0\mid 0\mid 0)$, $B\,(3\mid 0\mid 0)$, $C\,(3\mid 5\mid 0)$, $D\,(0\mid 5\mid 0)$, $E\,(0\mid 0\mid 4)$, $F\,(3\mid 0\mid 4)$, $G\,(3\mid 5\mid 4)$ und $H\,(0\mid 5\mid 4)$.

Den Abstand zwischen den Kanten AB und GH erhält man, indem man die Entfernung der Punkte A und H berechnet, da die Kiste quaderförmig ist :

$$\overline{AH} = |\overrightarrow{AH}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+5^2+4^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$$

Der Abstand der Kanten AB und GH beträgt etwa 6,4 LE.

Um zu zeigen, dass die Gerade g durch E und H in jeder Ebene $E_t : tx_1 - x_3 = -4$ liegt, stellt man die Geradengleichung von g auf und setzt sie in E_t ein. Man erhält:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

Einsetzen von g in E_t ergibt: $t \cdot 0 - (4 + s \cdot 0) = -4$ bzw. $-4 = -4$.

Aufgrund der wahren Aussage liegt die Gerade g in jeder der Ebenen E_t.

Bei geschlossener Kiste liegt der Punkt $F\,(3\mid 0\mid 4)$ auf dem Deckel. Setzt man die Koordinaten von F in E_t ein, so erhält man: $t \cdot 3 - 4 = -4 \;\Rightarrow\; t = 0$.

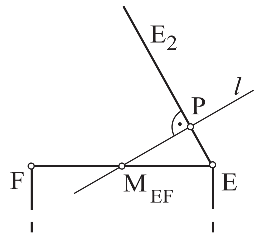
Somit liegt der Deckel bei geschlossener Kiste in der Ebene $E_0 : -x_3 = -4$ bzw. $x_3 = 4$.

Wird der Deckel um 90° geöffnet, so geht der Eckpunkt F des geschlossenen Deckels in den Eckpunkt $\overline{F}\,(0\mid 0\mid 7)$ über.

Setzt man die Koordinaten von $\overline{F}$ in E_t ein, so erhält man: $t \cdot 0 - 7 = -4 \;\Rightarrow\; -7 = -4$.

Aufgrund des Widerspruchs liegt der um 90° geöffnete Deckel in keiner der Ebenen E_t.

b)



Der Punkt P ist der Schnittpunkt der Lotgeraden l und der Ebene E_2.
Die Ebene E_2 hat die Gleichung $E_2: \ 2x_1 - x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Kante EF hat die Koordinaten $M_{EF}\,(1{,}5 \mid 0 \mid 4)$. Die Lotgerade l geht durch den Punkt M_{EF} und ist orthogonal zu E_2 (der Richtungsvektor von l ist somit der Normalenvektor von E_2):

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

Schneidet man l mit E_2, so ergibt sich: $2 \cdot (1{,}5 + 2r) - (4 - r) = -4 \Rightarrow r = -0{,}6$.
Setzt man $r = -0{,}6$ in l ein, so erhält man den gesuchten Punkt $P\,(0{,}3 \mid 0 \mid 4{,}6)$, in welchem der Stützstab auf den Deckel trifft.

c) Um den Öffnungswinkel α zu bestimmen, wenn der Deckel in E_2 liegt, berechnet man den Winkel zwischen dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ von E_2 und dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene EFGH. Man erhält:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4^\circ$$

Wenn der Deckel in E_2 liegt, beträgt der Öffnungswinkel etwa 63,4°.

Bei einem Öffnungswinkel von $\alpha = 60^\circ$ erhält man:

$$\cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{t^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

Da $\cos 60 = \frac{1}{2}$ ist, gilt: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow \sqrt{t^2+1} = 2 \Rightarrow t^2 + 1 = 4 \Rightarrow t = \sqrt{3}$ ist einzige Lösung wegen $t \geqslant 0$.
Somit liegt der um 60° geöffnete Deckel in der Ebene $E_{\sqrt{3}}: \sqrt{3}x_1 - x_3 = -4$.

Um den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α zu bestimmen, löst man die Gleichung $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_t}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_t}|} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ nach t auf. Wegen $\alpha < 90^\circ$ ist $\cos\alpha \neq 0$ und man erhält:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} &= \cos\alpha \\
\frac{1}{\cos\alpha} &= \sqrt{t^2+1} \\
\frac{1}{(\cos\alpha)^2} &= t^2+1 \\
\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 1 &= t^2 \\
t_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 1}
\end{aligned}
$$

Wegen $t \geqslant 0$ ist $t = \sqrt{\frac{1}{(\cos\alpha)^2} - 1}$ die einzige Lösung.